Notas em Mateática Aplicada

ISSN 2175-3385
e-ISSN 2236-5915

Volume 87, 2019

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2019

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/p_notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2019

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS VARIACIONAIS

Luis Adauto Medeiros
luizadauto@gmail.com

Departamento de Métodos Matemáticos - DMM
Instituto de Matemática - IM
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Sandra Mara Cardoso Malta
smcm@lncc.br

Coordenação de Métodos Matemáticos e Computacionais- COMAC
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

SBMAC Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2019

Coordenação Editorial: Luiz Mariano Carvalho

Coordenação Editorial da Série: Alexandre L. Madureira

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Medeiros, Luis A.
Introdução aos Métodos Variacionais - São Carlos, SP :
SBMAC, 2019, 82 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. ??)

ISBN 978-85-8215-088-7 e-ISBN 978-85-8215-087-0

1. Equações Diferenciais Parciais 2. Soluções Fracas 3. Problemas Variacionais
I. Medeiros, Luis A. II. Malta, Sandra M.C. III. Título. IV. Série

CDD - 51

A Lourdinha e Maurício,
pela paciência não enumerável.
Dedicamos estas notas

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) e, em particular, ao Prof. Alexandre Madureira, pela revisão técnica detalhada, que contribuiu significativamente para a qualidade final do texto. Também expressamos nossos agradecimentos aos colegas e alunos pelos comentários e críícas as diversas versões deste texto, durante todo o período da sua elaboração.

Conteúdo

Prefácio **xiii**

1 Introdução **1**
1.1 Motivação 1
1.2 Roteiro 3

2 Conceitos Fundamentais de Espaços de Hilbert **5**
2.1 Projeção sobre Subespaços 5
2.2 Formas Lineares Contínuas 8
2.3 Convergências Fraca e Forte 9
2.4 Distribuições 11
2.4.1 Derivada de Distribuições 14
2.5 Espaços de Sobolev 16
2.6 O Teorema de Lax-Milgram 18
2.6.1 O Problema de Dirichlet Homogêneo 21
2.6.2 O Problema de Neumann Homogêneo 22
2.6.3 O Problema Misto Dirichlet-Neumann 23
2.7 Exercícios 25

3 O Problema da Membrana **27**
3.1 Análise da Solução do Problema da Membrana 27
3.2 Regularidade das Soluções Fracas 31
3.3 Deformações da Membrana com Obstáculos 34
3.4 Exercícios 38

4 Problemas de Evolução **39**
4.1 Equação Linear de Ondas 39
4.1.1 Existência e Unicidade de Solução 39
4.1.2 Regularidade da Solução 47
4.2 Equação do Calor 48
4.3 Exercícios 52

A Conceito de Solução Fraca de uma EDP **55**
A.1 Exercícios 59

B O Teorema de Hahn-Banach **61**

C Análise Numérica da Equação do Calor **65**
C.1 O Problema Estacionário 65
C.1.1 O Problema Aproximado 66
C.2 O Problema Transiente 71
C.2.1 O Problema Semi-Discreto 72
C.2.2 O Problema Totalmente Discretizado 76
C.3 Exercícios 79

Prefácio

Este texto pretende introduzir, brevemente, e de forma básica, definições e resultados importantes da Análise Funcional, visando o entendimento de alguns métodos variacionais clássicos aplicados na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs).

O público-alvo sugerido é de alunos de graduação dos cursos de Bacharelado em Matemática e cursos iniciais de pós-graduação (Mestrado). A ideia é apresentar os resultados para aqueles que desejam estudar Análise Funcional, com o objetivo de se especializar nas áreas de análise de EDPs (soluções fracas) e também da análise numérica. O diferencial desse texto, em relação aos que já existem na literatura, pode ser, por exemplo, a apresentação dos temas via motivação de problemas simples de interesse da Engenharia Mecânica, e a tentativa de introdução dos mesmos via uma linguagem acessível. Porém, todos os tópicos abordados podem ser encontrados em livros clássicos de Análise Funcional e de EDPs.

Finalmente, vale comentar que a base do manuscrito submetido é fruto de um curso ministrado pelos autores no *Verão de 1996 do LNCC* (Laboratório Nacional de Computação Científica, no Rio de Janeiro e também apresentado na forma de minicurso nas edições do CNMAC de 1988 (Ouro Preto-MG) e 1997 (Gramado-RS).

Rio de Janeiro, Junho de 2019.

Sandra Malta
Luis Adauto Medeiros

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Inicia-se com um problema de Física servindo de exemplo para outras aplicações. Trata-se de encontrar o modelo matemático representando a configuração de equilíbrio de uma membra elástica, presa no bordo, submetida a um campo de forças modificando a configuração de equilíbrio inicial.

Idealiza-se a membrana como um aberto limitado conexo Ω do plano $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira denota-se por Γ. Supõe-se a membrana presa ao longo de Γ e submetida a um campo de forças $f(x_1, x_2)$. Uma hipótese fundamental é que os deslocamentos dos pontos (x_1, x_2) de Ω, sob a ação de $f(x_1, x_2)$, são perpendiculares ao plano $x_1 0 x_2$. Tais deslocamentos são considerados pequenos. Por esta razão, o modelo matemático a ser encontrado denomina-se *pequenas deformações verticais de uma membrana elástica presa no bordo*.

Dado um ponto (x_1, x_2) de Ω, sua posição, pela ação de $f(x_1, x_2)$, representada por S, é definida pelo conjunto

$$S = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3; z = u(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega\}.$$

O objetivo desta seção é caracterizar S por meio uma equação.

A ação de $f(x_1, x_2)$, no ponto (x_1, x_2) de Ω, gera uma reação, em sentido contrário, suposta proporcional ao deslocamento $u(x_1, x_2)$. Assim, em cada ponto atua a força $f(x_1, x_2) - ku(x_1, x_2)$, onde $k > 0$ é o coeficiente de reação do meio (membrana). O trabalho realizado por esta força para efetuar o deslocamento du é $[f(x_1, x_2) - ku(x_1, x_2)]du$. Desse modo, o trabalho realizado para deslocar, verticalmente, o ponto $(x_1, x_2, 0)$ de Ω ao ponto $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ de S é representado por $\int_0^u (f - ku)du = fu - \frac{k}{2}u^2$. Finalmente, o trabalho total ao deformar Ω em S será o somatório sobre os pontos de Ω, isto é,

$$U_1 = \int_\Omega (fu - \frac{k}{2}u^2)dx. \tag{1.1.1}$$

Procura-se, a seguir, tornar intelígivel a noção de tensão na membrana. Pense na membrana cortada em duas partes A e B ao longo de uma curva l, lembrando-se todavia, de que se está supondo que, em repouso, a membrana esteja esticada, ou melhor, que ela esteja presa em seu bordo. Assim, admitindo-se o corte l, uma parte exerce ação sobre a outra. Suponha-se que a ação da parte A sobre B, ao longo de l, possa ser substituída por uma força uniformemente distribuída ao longo de l, fronteira de B, de modo que a cada elemento de arco dl esteja aplicada uma força τdl, dirigida segundo a normal externa a l, situada no plano tangente à membrana e τ chama-se vetor tensão. Limitar-se-á ao estudo de oscilações de membranas no caso em que há distribuição uniforme de tensões sobre a membrana, isto é, em que a tensão τ não depende da direção nem do corte l.

Supõe-se que a única força externa atuando sobre a membrana seja $f(x_1, x_2)$ e que além desta atua apenas a tensão τ, suposta constante em Ω. A seguir encontra-se o trabalho realizado pela tensão τ, quando Ω assume a posição S. De fato, considere-se um retângulo dx_1dx_2 de Ω o qual deformou-se, por $f(x_1, x_2)$, na porção ds de S. O trabalho efetuado pela tensão para deformar dx_1dx_2 em ds é dado por $\tau(ds - dx_1dx_2)$. Note-se que

$$ds = \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx_1dx_2.$$

Representando-se por ∇u o gradiente da função real u, obtém-se:

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2.$$

Portanto, $ds = (1+|\nabla u|^2)^{1/2}dx_1dx_2$. Aproximando-se esta raiz por meio do binômio de Newton, levando-se em conta a hipótese de pequenas deformações, obtém-se:

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) dx_1dx_2.$$

Logo,

$$\frac{\tau}{2}|\nabla u|^2dx_1dx_2$$

é o trabalho da tensão realizado na deformação de dx_1dx_2 em ds. Por outro lado, o trabalho da tensão na deformação de Ω em S é dado por

$$U_2 = \frac{\tau}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx. \tag{1.1.2}$$

Concluí-se de (1.1.1) e (1.1.2) que o trabalho total para deformar Ω em S é definido como

$$J(u) = \frac{\tau}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \int_\Omega \left(fu - \frac{k}{2}u^2\right) dx, \tag{1.1.3}$$

onde $J(.)$ é um *funcional linear*, que será estudado a seguir. Note-se que representa-se por $\int_\Omega$ a integral dupla sobre Ω e por dx a medida dx_1dx_2.

Qualquer função regular (suave) definida em Ω, nula sobre Γ, pode ser pensada como representando deformações verticais da membrana elástica, presa no bordo Γ. Denomina-se classe admissível sobre Ω, o espaço vetorial real das funções reais em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$ e nulas em Γ. Representa-se esta classe por $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$. Consequentemente, $J(u)$ dado por (1.1.3) é bem definido em $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$, i.e., $J : \mathcal{A}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

O *Princípio da Ação Mínima* afirma que de todos os objetos de $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ o que representa a deformação vertical da membrana elástica é aquele que torna estacionário o funcional $J(u)$, isto é, que anula a derivada de $J(u)$. De modo explícito, posições de equilíbrio são funções u de $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ tais que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}[J(u + \lambda v) - J(u)] = 0, \qquad \lambda \neq 0, \tag{1.1.4}$$

para todo $v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$. A expressão em (1.1.4) é a derivada de Gateaux do funcional $J(\cdot)$ na direção de v.

Passa-se agora ao cálculo do limite em (1.1.4). Por definição tem-se

$$J(u+\lambda v) = \frac{\tau}{2}\int_\Omega |\nabla u + \lambda v|^2 dx - \int_\Omega (u+\lambda v) f dx +$$
$$+\frac{k}{2}\int_\Omega (u+\lambda v)^2 dx = \frac{\tau}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \tau\lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx +$$
$$+\frac{\tau\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega u f dx - \lambda \int_\Omega v f dx +$$
$$+\frac{k}{2}\int_\Omega u^2 dx + k\lambda \int_\Omega u v dx + \frac{k\lambda^2}{2}\int_\Omega v^2 dx$$

ou seja,

$$J(u+\lambda v) = J(u) + \tau\lambda \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx - \lambda \int_\Omega v f dx + k\lambda \int_\Omega u v dx +$$
$$+\frac{\tau\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{k\lambda^2}{2}\int_\Omega v^2 dx.$$

Daí, resulta que o limite em (1.1.4) reduz-se à equação

$$\tau \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + k \int_\Omega u v dx = \int_\Omega f v dx, \tag{1.1.5}$$

para toda $v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$. Concluí-se, portanto, que as funções u, que representam deformações da membrana Ω, submetida ao campo de força $f(x_1, x_2)$, são caracterizadas pela equação (1.1.5), que deve ser satisfeita para toda v admissível ($v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$.)

1.2 Roteiro

Um dos objetivos dessse texto é o estudo da equação (1.1.5). Inicialmente, suponha que u seja duas vezes continuamente diferenciável em Ω e $v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$. Aplicando a *Primeira Fórmula de Green ou o Lema de Green* , dada por,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega v \Delta u \, dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma, \tag{1.2.6}$$

à primeira integral em (1.1.5) e supondo $\tau = 1$, obtém-se

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx.$$

Portanto, a equação (1.1.5) fica re-escrita como

$$\int_\Omega [-\Delta u + k u] v dx = \int_\Omega f v dx$$

para todo $v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$. Deduz-se daí que u, descrevendo as deformações de uma membrana elástica, presa no bordo Γ, é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u(x_1, x_2) + k u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{array} \right. \tag{1.2.7}$$

Note-se a profunda distinção entre as formulações (1.1.5) e (1.2.7). Na primeira exige-se apenas uma derivada de u enquanto que na segunda necessário se torna que u possua duas derivadas. Em (1.1.5) a solução é vista sob a forma de uma igualdade integral e em (1.2.7) exige-se uma igualdade pontual. Nessa última formulação as derivadas que aparecem são no sentido local de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716). Por outro lado, na formulação (1.1.5), prova-se, a seguir, que a noção de derivada, sugerida pela própria formulação, será uma noção global idealizada por Laurent Schwartz (1945) e Sergei Sobolev (1930).

Examinando o problema sob a forma pontual (1.2.7) encontra-se uma grande dificuldade imposta pela forma geométrica de Ω. Assim, as soluções quando Ω é um retângulo ou um círculo são estudadas nos primeiros cursos de matemática da graduação. A formulação (1.1.5) sendo global são exigidas determinadas condições de integrabilidade.

Para estudar matematicamente o modelo da membrana elástica presa no bordo (1.1.5) introduzimos no Capítulo 2 conceitos fundamentais de espaços de Hilbert e então retornamos, no Capítulo 3, ao estudo da membrana elástica, onde analisamos a regularidade da solução e uma formulação mais geral para o problema, i.e., as deformações da membrana com obstáculos. No Capítulo 4 comentamos resultados clássicos de existência, unicidade e regularidade para problemas de evolução, cujas soluções variam no espaço e tempo, tais como a equação linear de ondas e a equação do calor. É introduzido no Apêndice A o conceito de solução fraca de uma EDP e apresentada, no Apêndice B, uma demonstração do Teorema de Hahn-Banach, retirada das notas de aula de um curso de Análise de Leopoldo Nachbin (1922-1993). Finalmente, no Apêndice C exibimos a análise numérica da discretização temporal e espacial da equação do calor pelos métodos númericos de diferenças finitas e elementos finitos, respectivamente.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais de Espaços de Hilbert

2.1 Projeção sobre Subespaços

Definição 2.1 (Espaço de Hilbert)**.** *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno [7]. Com $L^2(\Omega)$ representa-se o espaço de Hilbert das funções reais em Ω cujo quadrado é integrável a Lebesgue [12, 13] em Ω. Isto significa dizer que*

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |u(x)|^2\, dx < \infty\}.$$

O produto escalar e a norma por ele induzida, em $L^2(\Omega)$, são respectivamente, definidos por:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \quad e \quad |v|^2 = \int_\Omega |v(x)|^2\, dx.$$

De modo geral, considere-se um espaço de Hilbert real V, cujo produto escalar representa-se por $((.,.))$ e a norma por ele induzida por $\|.\|_V$. Tem-se para cada $v \in V$ que sua norma é dada por

$$\|v\|_V^2 = ((v, v)).$$

Diz-se que um subconjunto M de V é um subespaço de V, quando M for um subespaço vetorial de V e fechado em V, segundo a topologia de V dada pela norma.

Definição 2.2. *Seja M um subespaço próprio de V e u_0 um vetor de V. Denomina-se distância de u_0 a M ao número positivo*

$$\delta = \inf_{u \in M} \|u_0 - u\|_V.$$

Proposição 2.1. *Se $M \subset V$ for um subespaço próprio de V e $u_0 \in V$ então existe um único $v \in M$ tal que*

$$\delta = \|u_0 - v\|_V.$$

Demonstração: Seja $u_0 \notin M$, pois se $u_0 \in M$ o resultado é trivial. Para provar a unicidade de v, suponha-se que existam dois vetores v e $\hat{v}$ em M tais que

$$\delta = \|u_0 - v\|_V = \|u_0 - \hat{v}\|_V.$$

Tem-se $\frac{1}{2}(v + \hat{v}) \in M$ pois M é um subespaço vetorial. Então, pela definição de δ como um ínfimo, resulta

$$\|u_0 - \frac{v - \hat{v}}{2}\|_V \geq \delta.$$

Tem-se,

$$\|u_0 - \frac{v + \hat{v}}{2}\|_V = \frac{1}{2}\|u_0 - v + u_0 - \hat{v}\|_V \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0 - v\|_V + \frac{1}{2}\|u_0 - \hat{v}\|_V = \delta.$$

Das duas últimas desigualdades para δ, obtém-se

$$\|(u_0 - v) + (u_0 - \hat{v})\|_V = \|u_0 - v\|_V + \|u_0 - \hat{v}\|_V. \tag{2.1.1}$$

Demonstra-se que (2.1.1) implica a dependência linear de $u_0 - v$ e $u_0 - \hat{v}$, isto é, $u_0 - v = \lambda(u_0 - \hat{v})$ com $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 1$ então $v = \hat{v}$. Se $\lambda \neq 1$ é contraditório pois u_0 não pertence a M. Logo $v = \hat{v}$.

A seguir, prova-se a existência do vetor v. De fato, sendo δ um ínfimo, existe uma sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de M tais que:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_0 - v_n\|_V = \delta.$$

É suficiente mostrar que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para v, que pertence a M. Para isto, basta provar que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy do subespaço M. De fato, tem-se,

$$\|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|_V \leq \frac{1}{2}\|u_0 - v_m\|_V + \frac{1}{2}\|u_0 - v_n\|_V.$$

Resulta que,

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|_V \leq \delta.$$

Sendo $\frac{1}{2}(v_m + v_n) \in M$, concluí-se que

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|_V \geq \delta.$$

Das duas desigualdades anteriores segue-se

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|_V = \delta.$$

Sabe-se que um espaço vetorial V, dotado de produto escalar $((\cdot,\cdot))$, vale a *Identidade do Paralelograma*, ou seja,

$$\|u - v\|_V^2 + \|u + v\|_V^2 = 2(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2), \tag{2.1.2}$$

para todo par de vetores u, v de V. Logo, tomando-se em (2.1.2) $u = u_0 - v_m$ e $v = u_0 - v_n$, obtém-se

$$\|v_m - v_n\|_V^2 = 2\|u_0 - v_m\|_V^2 + 2\|u_0 - v_n\|_V^2 - 4\left\|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\right\|_V^2.$$

Considerando-se o limite quando m, n tendem para o infinito, tem-se

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\|_V = 0.$$

Resulta que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M, logo convergente para $v \in M$ pois M é fechado em V. Tem-se $\|u_0 - v\|_V \geq \delta$ porque δ é o ínfimo. Logo,

$$\delta \leq \|u_0 - v\|_V \leq \|u_0 - v_n\|_V + \|v - v_n\|_V.$$

Portanto, tomando-se o limite quando n tende para o infinito, obtém-se $\delta = \|u_0 - v\|_V$. Conclui-se que a cada vetor u_0 de V fica associado um único v de M tal que

$$\|u - v\|_V = \inf_{u\in M} \|u_0 - u\|_V.$$

■

Observa-se na demonstração da Proposição 2.1 que a única propriedade vetorial de M crucial na prova foi que: se $v_m, v_n \in M$ tem-se $\frac{1}{2}(v_m + v_n) \in M$. Isto diz que o resultado vale quando M é apenas um convexo fechado de V. Desse modo, suponha-se que exista um vetor $\hat{v}$ não nulo e não perpendicular a $u_0 - v$, isto é,

$$((u_0 - v, \hat{v})) = \lambda \neq 0.$$

Considere o vetor

$$v_1 = v + \beta\hat{v} \quad \text{sendo} \quad \beta = \frac{\lambda}{((\hat{v}, \hat{v}))}.$$

Tem-se,

$$\|u_0 - v_1\|_V^2 = \left(\left(u_0 - v - \frac{\lambda}{((\hat{v},\hat{v}))}\hat{v}, u_0 - v - \frac{\lambda}{((\hat{v},\hat{v}))}\hat{v}\right)\right).$$

Efetuando-se os cálculos, chega-se à contradição

$$\|u_0 - v_1\|_V^2 = \|u - v\|_V^2 - \frac{\lambda^2}{((\hat{v},\hat{v}))} \leq \|u_0 - v\|^2$$

pois v é o vetor que minimiza a forma quadrática $\|u_0 - w\|_V^2$. Logo, $u_0 - v$ é perpendicular ao subespaço M. Conclui-se que todo vetor u_0 em V, não pertencente a M, decompõe-se, de modo único, sob a forma

$$u_0 = v + w.$$

Este resultado é conhecido como o*Teorema da Projeção* , com $v \in M$ e w perpendicular a M. Diz-se que v é a componente de u_0 em M ou projeção de u_0 sobre M.
□

2.2 Formas Lineares Contínuas

Denomina-se forma linear contínua sobre um espaço de Hilbert real V, a uma função $f : V \to \mathbb{R}$, linear e contínua em V. Diz-se que uma forma linear $f : V \to \mathbb{R}$ é limitada, quando existe um constante C positiva tal que

$$|f(v)| \leq C\|v\|_V \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Demonstra-se que as noções de forma linear contínua e forma linear limitada são equivalentes e também que

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(v)|}{\|v\|_V};\ v \neq 0\right\}. \tag{2.2.3}$$

é uma norma para f e tem-se ainda a desigualdade

$$|f(v)| \leq \|f\|\|v\|_V.$$

Exemplo 2.1. *Fixando-se $u \in V$, a função $f(v) = ((u, v))$ é uma forma linear contínua em V. Assim, fixada uma coordenada no produto escalar de V obtém-se uma forma linear contínua.*

A seguir, demonstra-se o Lema de Riesz-Fréchet provando que as formas lineares contínuas em um espaço de Hilbert V são representadas por um produto escalar, de modo único. Porém, antes disto, apresenta-se duas importantes e úteis desigualdades, a saber

Desigualdade de Cauchy-Schwarz Para quaisquer dois vetores x, y de um espaço vetorial V com produto interno e norma $(\|\cdot\|)$, tem-se

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|, \tag{2.2.4}$$

Desigualdade de Poincaré Seja $C > 0$ uma constante que depende de Ω, logo

$$|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \geq C|u|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2.5}$$

Lema 2.1 (Lema de Riesz-Fréchet)**.** *Seja V um espaço de Hilbert. A cada forma linear contínua $f : V \to \mathbb{R}$, corresponde um único vetor $v \in V$ tal que*

$$f(u) = ((u, v)), \quad \textit{para todo} \quad u \in V.$$

Além disso, tem-se $\|f\| = \|v\|_V$.

Demonstração: Suponha f diferente da forma nula. Pode-se mostrar que da continuidade da forma linear f tem-se

$$N = \{v \in V;\ f(v) = 0\}$$

é um subespaço de Hilbert de V. Portanto, existe $u_0 \in V, u_0 \neq 0$, perpendicular a N. Considere-se os vetores $f(u)u_0 - f(u_0)u$ quando $u \in V$. Estes vetores pertencem a N. Sendo u_0 perpendicular a N resulta que

$$((f(u)u_0 - f(u_0)u, u_0)) = 0.$$

Logo, prova-se que para todo $u \in V$, existe $v = \frac{f(u)}{((u_0,u_0))} u_0$ tal que

$$f(u) = ((u, v)). \tag{2.2.6}$$

Vamos agora mostrar a unicidade. Suponha que existam dois vetores v e $\hat{v}$ em V satisfazendo (2.2.6), ou seja,

$$f(u) = ((u, v)) = ((u, \hat{v})) \quad \text{para todo} \quad u \in V.$$

Então, encontra-se $((u, v - \hat{v})) = 0$; tomando-se $u = v - \hat{v}$ obtém-se $v = \hat{v}$.

Finalmente, resta provar que $\|f\| = \|v\|_V$. De fato, de (2.2.6) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.4)

$$|f(u)| = |((u, v))| \leq \|u\|_V \|v\|_V,$$

o que implica $\|f\| \leq \|v\|_V$. Tomando-se $u = v$ chega-se a $f(v) = ((v, v)) = \|v\|_V^2$ resultando $\|f\| \geq \|v\|_V$. Logo, $\|f\|_V = \|v\|$. ■

Represente-se por V' o espaço vetorial das formas lineares contínuas em V . Do Lema de Riesz-Fréchet 2.1 resulta que existe uma isometria J de V em V'. Assim, dadas $f, g \in V'$ define-se um produto escalar em V' por

$$((f, g))_{V'} = ((J^{-1}f, J^{-1}g)). \tag{2.2.7}$$

Com este produto escalar V' é um espaço de Hilbert denominado *espaço Dual* do espaço V.

2.3 Convergências Fraca e Forte

Em um espaço de Hilbert há dois conceitos de convergência - um dado pela norma, outro pelo produto escalar. Considere-se um sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de V.

i) diz-se que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v na norma de V quando $\lim\limits_{n\to\infty} \|v - v_n\|_V = 0$ em $\mathbb{R}$.

ii) diz-se que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v segundo o produto escalar de V, quando

$$\lim_{n\to\infty} ((v_n, w)) = ((v, w)), \quad \text{para todo} \quad w \in V.$$

Proposição 2.2. *Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v segundo a norma então ela converge para v segundo o produto escalar.*

<u>Demonstração:</u> *De fato, tem-se*

$$|((v_n, w)) - ((v, w))| \leq \|v_n - v\|_V \|w\|_V,$$

para todo $w \in V$. Logo a sucessão converge segundo o produto escalar. ■

A recíproca da Proposição 2.2 não é verdadeira, em geral. De fato, seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de V [7]. É possível provar da identidade de Parceval que para todo $v \in V$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |((e_n, v))|^2$$

é convergente. Logo, seu termo geral converge para zero, isto é, $\lim_{n\to\infty} |((e_n, v))| = 0$, para todo $v \in V$. Portanto, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero segundo o produto escalar $((\cdot,\cdot))$. Sabe-se que $\|e_m - e_n\|_V = \sqrt{2}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, logo não converge segundo a norma de V.

Daí diz-se que **a convergência segundo a norma ser forte e segundo o produto escalar ser fraca** . Com esta nomenclatura a Proposição 2.2 afirma que se uma sucessão de V converge forte ela converge fraco.

Teorema 2.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Para toda sucessão limitada $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Hilbert V extrai-se uma subsucessão $(v_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ fracamente convergente.*

Demonstração: Sendo $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ limitada, existe $C > 0$ tal que $\|v_n\|_V \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Represente-se por M o subespaço de V gerado pelo conjunto dos vetores $v_n, n \in \mathbb{N}$. Assim, M é o fecho forte em V do conjunto das combinações lineares finitas $\sum_i \alpha_i v_i$ e pode-se mostrar que M é separável (existe um subconjunto enumerável e denso em M) [15].

Seja agora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto enumerável denso em M. A sucessão de números reais $\{((v_n, u_1))\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Do Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}$ resulta que ela possui uma subsucessão $\{((v_{1n}, u_1))\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. A sucessão $\{((v_{1n}, u_2))\}_{n\in\mathbb{N}}$ sendo limitada possui uma subsucessão $\{((v_{2n}, u_2))\}$ convergente. Por este processo constrói-se uma sucessão de sucessões

$$(v_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (v_{kn})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$$

tal que cada uma é subsucessão da anterior e $\{((v_{kn}, u_k))\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $k \in \mathbb{N}$. Resulta que a sucessão diagonal $\{((v_m, u_k))\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge para $k = 1, 2, ...$ Assim,obtém-se uma subsucessão $(v_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $\{((v_{n_\nu}, u_k))\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é convergente para $k = 1, 2, \ldots$.

A seguir, demonstra-se que a sucessão $\{((v_{n_\nu}, w))\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para todo $w \in V$. De fato, pelo *Teorema da Projeção*, todo $w \in V$ decompõe-se, de modo único, sob a forma $w = v + z$, sendo $v = proj_M w$ e z perpendicular a M. Portanto, $((v_{n_\nu}, w)) = ((v_{n_\nu}, v))$. Resta provar, apenas, que $((v_{n_\nu}, v))$ converge para todo $v \in M$. É suficiente demonstrar que a sucessão $((v_{n_\nu}, v))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato, tem-se

$$\begin{aligned} |((v_{n_r} - v_{n_s}, v))| &= |((v_{n_r} - v_{n_s}, v - v_k + v_k))| \leq \\ &\leq |((v_{n_r} - v_{n_s}, v_k))| + |((v_{n_r} - v_{n_s}, v - v_k))| \\ &\leq |((v_{n_r} - v_{n_s}, v_k))| + 2C\|v - v_k\|_V. \end{aligned}$$

Note que $\{((v_{n_\nu}, v_k))\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é convergente pra todo $k = 1, 2, ...$, por construção, logo uma sequência de Cauchy [1]. Os v_k são densos em M, logo $\|v_k - v\|_V$ converge para zero. Daí resulta que $\{((v_{n_\nu}, v))\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para todo $v \in M$.

Seja agora $f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(v) = \lim_{\nu\to\infty} ((v_{n_\nu}, v)).$$

para todo $v \in M$ e zero no perpendicular. Sendo $V = M \oplus M^\perp$ de modo único, f é bem definida em V. Esta f é uma forma linear e contínua em V. Portanto, do

[1] $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em V se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $|u_n - u_m| < \epsilon$ para todo $m \geq n_0, n \geq n_0$

Lema de Riesz-Fréchet, existe um único $u \in V$ tal que $f(v) = ((u, v))$ para todo $v \in V$. Logo,

$$\lim_{\nu \to \infty} ((v_{n_\nu}, v)) = ((u, v))$$

para todo $v \in V$. A subsucessão converge fraco. ■

2.4 Distribuições

Inicia-se com o caso unidimensional, isto é, $\Omega =]a, b[$ é um aberto da reta real $\mathbb{R}$, podendo Ω ser a própria reta $\mathbb{R}$.

Denomina-se suporte de uma função $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ ao fecho do conjunto dos pontos ξ de $]a, b[$ onde u é diferente de zero. Note que o suporte de u é fechado em $\mathbb{R}$. Quando o suporte de u for limitado é um compacto da reta. São consideradas as funções $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ com suporte compacto.

Representa-se então por $C_0^\infty(a, b)$ o espaço vetorial das funções reais em $]a, b[$, infinitamente continuamente diferenciáveis em $]a, b[$, com suporte compacto em $]a, b[$. A primeira questão é saber que $C_0^\infty(a, b)$ é não vazio. De fato,

$$u(x) = \left| \begin{array}{l} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, \quad \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0, \quad \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{array} \right.$$

pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Logo $C_0^\infty(a, b)$ não é vazio.

Definição 2.3. *(Noção de Convergência em $C_0^\infty(a, b)$) Diz-se que uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \epsilon N}$ de funções $\varphi_\nu \in C_0^\infty(a, b)$ converge para zero quando forem satisfeitas as condições*

i) *as funções φ_ν possuem seus suportes contidos em um compacto fixo $K \subset]a, b[$;*

ii) *a sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \epsilon N}$ e a sucessão de derivadas de todas as ordens convergem para zero em K.*

O espaço vetorial $C_0^\infty(a, b)$ munido dessa noção de convergência representa-se por $\mathcal{D}(a, b)$.

Definição 2.4. *(Distribuição sobre $]a, b[$) Denomina-se distribuição sobre $]a, b[$ a toda forma linear contínua em $\mathcal{D}(a, b)$. Assim, uma distribuição sobre $]a, b[$ é uma função $T : \mathcal{D}(a, b) \to \mathbb{R}$, satisfazendo às condições:*

i) *T é linear, isto é,*

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

para todo par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(a, b)$;

ii) *T é contínua em $\mathcal{D}(a, b)$, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in N}$ converge para zero em $\mathcal{D}(a, b)$, então*

$$T(\varphi_\nu) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \qquad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Denota-se o valor de T em φ por $T(\varphi)$ como usual mas usa-se também $\langle T, \varphi \rangle$.

Definição 2.5 (Noção de Convergência)**.** *Diz-se que uma sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de distribuições converge para T, quando a sucessão numérica $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ para toda φ em $\mathcal{D}(a, b)$. O espaço vetorial das distribuições sobre $]a, b[$ com esta noção de convergência representa-se por $\mathcal{D}'(a, b)$.*

Exemplo 2.2. *Representa-se por* $L^p_{loc}(a,b)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$, *o espaço vetorial das funções* $u :]a,b[\to \mathbb{R}$ *cujo o módulo elevado a* p, *restrito a cada compacto* K *de* $]a,b[$, *é integrável. Dito simbolicamente, significa dizer que para todo compacto* $K \subset]a,b[$ *tem-se*

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty.$$

Com $L^p(a,b)$, *onde* $1 \leq p \leq \infty$ *representa-se o espaço vetorial das funções cujo o módulo elevado a* p *é integrável em* $]a,b[$. *Destaca-se com ênfase o caso* $p = 2$, *isto é,* $L^2(a,b)$. *Considere-se* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *e a forma linear de* T *definida em* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *por*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{2.4.8}$$

A integral em (2.4.8) é finita já que φ *possui suporte compacto* K *no qual*

$$\int_K |u(x)|dx$$

é finita. A seguir prova-se que T *é uma distribuição. Primeiro observa-se que* T *linear em* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *pois, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)(\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx + \beta \int_{\mathbb{R}} u\psi dx = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi).$$

Resta provar que T *é contínua. De fato, para cada* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *encontra-se*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \int_K |u(x)||\varphi(x)|dx \leq (max_{x\in K}|\varphi(x)|) \int_K |u(x)|dx.$$

Como $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *a integral em* K *é finita, ou seja, ela é constante. Logo,*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\left(max_{x\in K}|\varphi(x)|\right).$$

Provando que T *é contínua em* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, *no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Realmente, se* $(\varphi_\nu)_{\nu\in N}$ *for uma sucessão de objetos de* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *convergente para zero em* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, *então existe um compacto fixo* K *de* $\mathbb{R}$ *contendo os suportes das* φ_ν. *Além disto,* $\varphi_\nu \to 0$ *uniformemente em* K, *isto é,* $max_{x\in K}|\varphi_\nu(x)| \to 0$, *quando* $\nu \to \infty$. *Logo* $\langle T, \varphi_\nu \rangle \to 0$, *provando a continuidade de* T. *Deste modo,* T *é uma distribuição, ou seja,* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *A seguir, demonstra-se que a distribuição* T *é univocamente definida por* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. *De fato, suponha* T *definida por duas funções* $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. *Tem-se*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx \qquad e \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} v\varphi dx$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x) - v(x)]\varphi(x)dx = 0, \tag{2.4.9}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Lema 2.2 (Lema de Du Bois Raymond)**.** *Se* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *for tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi dx = 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

então $u = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}$. [15, 4]

Resulta do Lema de Du Bois Raymond 2.2 e da identidade (2.4.9) que

$$u = v \quad \textit{quase sempre em} \quad \mathbb{R},$$

isto é, T é univocamente definida por u. Por esta razão identifica-se T com a função u que a define dizendo que a distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ [15]. $\square$

Exemplo 2.3. *Considere-se a forma linear δ_0 definida em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

É simples verificar a continuidade de δ_0 em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, portanto δ_0 é uma distribuição sobre $\mathbb{R}$, denominada massa de Dirac concentrada no ponto zero.

Proposição 2.3. *A distribuição δ_0 não é definida por uma função de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*
Demonstração: A demonstração será feita por redução a uma contradição. De fato, suponha-se que δ_0 seja definida por uma função u de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Sendo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ resulta que $x\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} ux\varphi dx = x\varphi(x)|_{x=0} = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} (ux)\varphi dx = 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Logo, sendo $ux \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, do Lema de Du Bois Raymond 2.2 tem-se $ux = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}$, isto é, $u = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}$. Portanto,

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx = 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Esta conclusão é falsa, pois

$$\varphi(x) = \left| \begin{array}{l} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, \quad \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0, \quad \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{array} \right.$$

pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; porém, $\varphi(0) = e^{-1} \neq 0$. Concluí-se então que δ_0 não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Tem-se deste modo dois exemplos significantes de distribuições. A primeira sendo $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas a segunda, a massa de Dirac δ_0, não. Assim o espaço vetorial $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ das distribuições sobre $\mathbb{R}$ contém efetivamente o espaço vetorial $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. O leitor poderá consultar [15] se tiver interesse em outros exemplos.

2.4.1 Derivada de Distribuições

À guisa de motivação será feita a revisão do método de integração por partes. Suponha-se que u, φ sejam objetos de $C^1(a,b)$, obtém-se

$$\int_a^b u\varphi' dx = u\varphi|_a^b - \int_a^b u'\varphi dx,$$

que é o processo de integração por partes. Se φ for um vetor de $\mathcal{D}(a,b)$, tem-se $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e daí resulta que

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b u'\varphi dx.$$

Tomando esta igualdade como motivação, Sergei Sobolev [19] introduziu o conceito de *derivada fraca* como segue.

Definição 2.6 (Derivada Fraca Sobolev)**.** *Foi visto que $u \in L^1_{loc}(a,b)$ identifica-se uma distribuição, isto é, u é uma distribuição por abuso de linguagem. Segundo Sobolev, a distribuição $u \in L^1_{loc}(a,b)$ possui derivada fraca, quando existe $h \in L^1_{loc}(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b h\varphi dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Tal objeto h de $L^1_{loc}(a,b)$ verificando a igualdade em $\mathcal{D}(a,b)$ denomina-se a derivada fraca de u segundo Sobolev [19]. Escreve-se,

$$\frac{du}{dx} = h \quad ou \quad u' = h.$$

Note-se que esta noção de derivada é dada apenas numa parte própria $L^1_{loc}(a,b)$ de $\mathcal{D}'(a,b)$. Esta noção é suficiente para o estudo de uma larga classe de problemas de matemática e suas aplicações. A noção de derivada idealizada por Laurent Schwartz [18] é dada para toda distribuição T de $\mathcal{D}'(a,b)$, como vemos a seguir.

Definição 2.7 (Derivada Schwartz)**.** *Define-se para toda $T \in \mathcal{D}'(a,b)$, sua derivada no sentido das distribuições ou segundo Laurent Schwartz, a distribuição $\frac{dT}{dx}$ definida sobre $]a,b[$, do modo seguinte:*

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \tag{2.4.10}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$.

Assim, toda distribuição $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ é derivável indefinidamente o que representa um progresso substancial do uso das distribuições nas aplicações. Isto não acontece ao adotarmos a noção de derivada fraca introduzida por Sergei Sobolev. A derivada de ordem n, isto é, $\frac{d^nT}{dx^n}$ é definida por

$$\left\langle \frac{d^nT}{dx^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dx^n} \right\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$.

Exemplo 2.4. *Foi demonstrado, ver Proposição 2.3, que δ_0 não é um objeto de $L^1_{loc}(a,b)$, entretanto é derivável no sentido das distribuições (segundo Laurent Schwartz). De fato,*

$$\left\langle \frac{d\delta_0}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \delta_0, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\varphi'(0), \quad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

De modo geral,

$$\left\langle \frac{d\delta_0}{dx^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta_0, \frac{d^n\varphi}{dx^n} \right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

$\square$

Usa-se a notação $\dfrac{d^nT}{dx^n}$ ou $T^{(n)}$ para a derivada de ordem n e T' para a derivada primeira.

Exemplo 2.5. *Considere-se a função $u(x) = |x|$, para $x \in \mathbb{R}$. Representando por u' sua derivada no sentido das distribuições, tem-se por definição*

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi' dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, porque $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Calculando-se a integral, resulta

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi' dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi' dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi' dx$$

onde

$$\int_{-\infty}^{0} x\varphi' dx = x\varphi|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} (+1)\varphi dx = \int_{-\infty}^{0} (-1)\varphi dx,$$

pois φ possui suporte compacto em $\mathbb{R}$.

De modo análogo encontra-se

$$-\int_{0}^{\infty} x\varphi' dx = \int_{0}^{\infty} (+1)\varphi dx.$$

Portanto, das últimas identidades e definições, escreve-se

$$\langle u', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{0} (-1)\varphi dx + \int_{0}^{\infty} (+1)\varphi dx. \tag{2.4.11}$$

Considerando agora a função $\operatorname{sig} x$, denominada sinal de x, ou seja,

$$\operatorname{sig} x = \left| \begin{array}{ll} +1, & \textit{se} \quad x > 0 \\ -1, & \textit{se} \quad x < 0 \end{array} \right.$$

e de (2.4.11), tem-se que a derivada no sentido das distribuições de $|u|$ em $\mathbb{R}$ é dada por

$$\langle u', \varphi \rangle = \langle \operatorname{sig} x, \varphi \rangle \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ou seja, $u' = (|x|') = \operatorname{sig} x$. $\square$

Exemplo 2.6. *Calcule a derivada de* $\operatorname{sig} x$. *Tem-se, por definição,*

$$\langle (\operatorname{sig} x)', \varphi \rangle = -\langle \operatorname{sig} x, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sig} x \, \varphi' dx =$$

$$= + \int_{-\infty}^{0} \varphi' \, dx - \int_{0}^{\infty} \varphi' \, dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle.$$

Portanto, tem-se

$$(sigx)' = 2\delta_0.$$

Note que $u(x) = |x|$ *é localmente integrável em* $\mathbb{R}$ *sendo sua derivada* $\operatorname{sig} x$ *que também é localmente integrável. Entretanto,* $\operatorname{sig} x$ *possui* $2\delta_0$ *para derivada a qual não é localmente integrável, embora derivável. Este exemplo mostra o aspecto geral da idéia de derivada segundo Laurent Schwartz, [18].* □

Até o momento considerou-se funções reais definidas em $]a, b[\subset \mathbb{R}$; porém, as noções se estendem sem dificuldade ao caso de um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$. Assim, tomando $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ define-se em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$ distribuição e derivada de distribuição . Por exemplo, $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ é a distribuição definida por

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Uma distribuição possui derivadas parciais de todas as ordens.

2.5 Espaços de Sobolev

O leitor interessado em mais detalhes sobre este assunto pode consultar [15].

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, podendo ser o próprio $\mathbb{R}^n$. Como foi visto anteriormente, toda $u \in L^1_{loc}(a, b)$ é identificado a uma distribuição sobre $]a, b[$. *Mutatis mutandis* conclui-se o mesmo resultado para os objetos de $L^1_{loc}(\Omega)$ e, portanto, os vetores de $L^2(\Omega)$ são considerados distribuições sobre Ω. Portanto, se $u \in L^2(\Omega)$ sendo uma distribuição possui derivada de todas as ordens no sentido das distribuições. O que não é verdade é que estas derivadas sejam definidas por funções de $L^2(\Omega)$, ou seja, pertençam a $L^2(\Omega)$. Um exemplo simples desta situação é $\operatorname{sig} x$ para $-1 < x < +1$ que é $L^2(-1, +1)$ mas sua derivada $2\delta_0$ não é $L^2_{loc}(-1, +1)$. Motivado por este aspecto, Sobolev introduziu um novo espaço de distribuições sobre Ω de largo uso nos problemas de contorno.

Definição 2.8 (Espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$)**.** *Denomina-se espaço de Sobolev de ordem um sobre* Ω*, ao espaço vetorial* $H^1(\Omega)$ *constituido das distribuições de* $L^2(\Omega)$ *cujas derivadas parciais também pertencem a* $L^2(\Omega)$*. Assim,*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad com \quad 1 \leq i \leq n\}. \tag{2.5.12}$$

Em $H^1(\Omega)$ *define-se o produto escalar e norma, respectivamente, do modo seguinte:*

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx \quad e \quad \|v\|^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega v^2 \, dx. \tag{2.5.13}$$

Proposição 2.4. *O espaço $H^1(\Omega)$, com o produto escalar $((\cdot,\cdot))$, é um espaço de Hilbert real.*
Demonstração: De fato, seja $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $H^1(\Omega)$. Resulta que $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $1\leq i\leq n$ são de Cauchy em $L^2(\Omega)$. É suficiente examinar a norma em $H^1(\Omega)$. Sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert ele é completo, logo

$$v_\nu \longrightarrow v_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

converge fraco em $L^2(\Omega)$ e, portanto, no sentido das distribuições em Ω. Desse modo,

$$-\int_\Omega v_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \to -\int_\Omega v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \quad \text{para toda} \quad \varphi\in\mathcal{D}(\Omega), \quad \text{com} \quad 1\leq i\leq n.$$

Por definição, do resultado acima, tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \nu}\varphi\,dx$$

para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, para $1\leq i\leq n$. Logo, conclui-se que

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial v_0}{\partial x_i}, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad \text{para} \quad 1\leq i\leq n.$$

Sendo a sucessão das derivadas de Cauchy, em $L^2(\Omega)$, obtém-se

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i} \longrightarrow v_i, \quad \text{em} \quad L^2(\Omega), \quad 1\leq i\leq n.$$

Deve-se provar que $\frac{\partial v_0}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)$. Note-se que esta convergência implica

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i} \longrightarrow v_i, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1\leq i\leq n.$$

Portanto, da unicidade do limite, $v_i=\frac{\partial v_0}{\partial x_i}$ pertence a $L^2(\Omega)$. Logo,

$$v_\nu \longrightarrow v_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega), \quad 1\leq i\leq n,$$

com $v_0\in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial v_0}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)$, $1\leq i\leq n$, provando que $v_0\in H^1(\Omega)$, isto é, $H^1(\Omega)$ é completo, logo um espaço de Hilbert. ■

Representa-se por $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Demonstra-se que se $v\in H_0^1(\Omega)$ então o traço de v na fronteira $\Gamma=\partial\Omega$ é zero [15] . O traço de v representa-se por $v|_\Gamma$ que se lê v restrito a Γ. Este é um abuso de notação. Assim,

$$H_0^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega); v=0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\}. \tag{2.5.14}$$

Portanto, $H_0^1(\Omega)$ é o espaço apropriado para a análise do modelo que representa a posição de equilíbrio de uma membrana elástica presa no bordo (ver equação (1.1.5)). Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert tem sentido falar em seu dual que representa-se por $H^{-1}(\Omega)$. Caracteriza-se o dual $H^{-1}(\Omega)$ como sendo o espaço das distribuições sobre Ω da forma

$$T = v_0 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

onde $v_0, v_1, ..., v_n$ são objetos do $L^2(\Omega)$. Tem-se as inclusões

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

após identificar-se $L^2(\Omega)$ como seu dual $(L^2(\Omega))'$. Mais detalhes, consulte [11, 15].

2.6 O Teorema de Lax-Milgram

Sejam V e H dois espaços de Hilbert, $V \subset H$ denso com injeção contínua. Dada uma forma bilinear $a(u, v)$ em V e uma forma linear contínua $L \in V'$ satisfazendo

$$a(u, v) = \langle L, v \rangle_{V' \times V}, \tag{2.6.15}$$

deseja-se resolver as seguintes questões:

i) quais restrições devem ser feitas à forma bilinear $a(u, v)$ para que exista uma única $u \in V$ solução de (2.6.15)?

ii) quais restrições devem ser feitas à forma $a(u, v)$ para que a solução do problema (2.6.15) seja o único $u \in V$ que minimize o funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle L, v \rangle_{V' \times V} \tag{2.6.16}$$

em V?

Estas questões resolvidas com a generalidade proposta incluem todos os problemas lineares dito V-elíticos-simétricos. Antes de respondê-las é necessário introduzir algumas definições importantes.

Definição 2.9. **a)** *diz-se que uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em V quando existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V, \quad \textit{para todo} \quad u, v \in V,$$

onde por $\| \cdot \|_V$ denota-se a norma do espaço V.

b) *diz-se que uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é coerciva (ou V-elítica) em V quando existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \textit{para todo} \quad u \in V.$$

c) *diz-se que a forma linear L é contínua em V se*

$$\langle L, v \rangle_{V' \times V} \leq C\|v\|_V, \quad \textit{para todo} \quad v \in V.$$

Tem-se $L \in V'$ (o dual de V).

O teorema que será demonstrado a seguir responde a questão **i**).

Teorema 2.2 (Teorema de Lax-Milgram). *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva em V. Então para toda $L \in V'$ existe um único $u \in V$ solução do problema (2.6.15).*

Demonstração: Primeiro demonstra-se a unicidade e a seguir a existência. Sejam u_1 e u_2 soluções do problema (2.6.15). Logo, tem-se

$$a(u_1, v) = \langle L, v\rangle_{V'\times V}, \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

$$a(u_2, v) = \langle L, v\rangle_{V'\times V}, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Das identidades acima, encontra-se

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Fazendo $v = u_1 - u_2$ e usando a coercividade da forma $a(\cdot,\cdot)$, obtém-se

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Consequentemente, $u_1 = u_2$ já que $\alpha \neq 0$.

Do Lema de Riesz-Fréchet 2.1 existe um único $l \in V$ tal que

$$\langle L, v\rangle_{V'\times V} = ((l, v)) \quad \text{para todo} \quad v \in V, \tag{2.6.17}$$

onde por $((\cdot,\cdot))$ denota-se o produto escalar em V. Supõe-se v fixo em $a(v, w)$; sendo a aplicação $w \longrightarrow a(v, w)$ linear e contínua, então de (2.6.17) é possível ter um único vetor de V denotado por $A(v)$ tal que

$$a(v, w) = (A(v), w), \quad \text{para todo} \quad v, w \in V. \tag{2.6.18}$$

O operador $A(v)$ é linear. De fato, tem-se

$$a(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = (A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w),\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall v_1, v_2, w \in V. \tag{2.6.19}$$

Por outro lado, da bilinearidade de $a(\cdot,\cdot)$, segue-se

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) &= \lambda_1 a(v_1, w) + \lambda_2 (v_2, w) \\ &= \lambda_1 (A(v_1), w) + \lambda_2 (A(v_2), w) \\ &= (\lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2), w). \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

Portanto, de (2.6.19) e (2.6.20), obtém-se

$$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2),$$

ou seja conclui-se a linearidade de $A(v)$. Desta propriedade denota-se $A(v) = Av$.

Demonstra-se a seguir a continuidade de $A(v)$. De fato, da continuidade de $a(\cdot,\cdot)$ existe C tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V, \quad \text{para todo} \quad v, u \in V.$$

Fazendo-se $w = Av$ em (2.6.18), tem-se

$$\|Av\|_V \leq C\|v\|_V.$$

De (2.6.17) e (2.6.18) o problema (2.6.15) equivale ao problema linear em V,

$$Au = l. \tag{2.6.21}$$

Reescreve-se (2.6.21) da seguinte forma

$$\begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad \text{u} \quad \text{tal que} \\ u = u - \rho(Au - l) \quad \text{para algum} \quad \rho > 0. \end{array}$$

Para resolver o problema de ponto-fixo (2.6.22), considera-se a aplicação $W_\rho : V \mapsto V$, definida por

$$W_\rho(v) = v - \rho(Av - l). \tag{2.6.22}$$

Para $v_1, v_2 \in V$, tem-se

$$\|W_\rho(v_2) - W_\rho(v_1)\|^2 = \|v_2 - v_1\|^2 - 2\rho a(v_2 - v_1, v_2 - v_1) + \rho^2\|A(v_2 - v_1)\|^2.$$

Logo,

$$\|W_\rho(v_2) - W_\rho(v_1)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|A\|^2)\|v_2 - v_1\|^2,$$

sendo W_ρ uma contração estritamente uniforme se $0 < \rho < 2\alpha\|A\|^2$. Considerando-se ρ variando neste intervalo, tem-se uma única solução do problema de ponto-fixo (2.6.22), que implica na existência de uma solução para o problema (2.6.15) e completa-se, assim, a demonstração do teorema. ■

Antes de responder a questão **ii)**, isto é, quando é possível a equivalência entre os problemas (2.6.15) e (2.6.16), acrescenta-se à definição (2.9) o seguinte conceito

d) Diz-se que uma forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é simétrica quando $a(u,v) = a(v,u)$ para todo $u, v \in V$.

Teorema 2.3. *Seja $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua, coerciva e simétrica em V e $L \in V'$. Então $u \in V$ solução do problema variacional (2.6.15) é o único elemento que minimiza o funcional $J(v)$ definido em (2.6.16) e vice-versa.*

Demonstração: Prova-se incialmente que (2.6.15) implica em (2.6.16). De fato, seja u solução do problema (2.6.15) e $v \in V$, calcula-se

$$\begin{aligned} J(v) = J(u + v - u) &= \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - L(u + v - u) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + a(u, v - u) - L(v - u) + \frac{1}{2}a(u - v, u - v) \\ &= J(u) + a(u, v - u) - L(v - u) + \frac{1}{2}a(u - v, u - v). \end{aligned}$$

Já que u é solução de (2.6.15) e $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, obtém-se

$$a(u, v - u) - L(v - u) = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

$$a(v - u, v - u) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Logo, tem-se

$$J(v) \geq J(u), \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

ou seja, u é a solução de (2.6.16). Demonstra-se a seguir que (2.6.16) implica (2.6.15). Seja u solução de (2.6.16) e $v \in V$, observa-se que

$$\frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \neq 0 \in \mathbb{R}. \tag{2.6.23}$$

Além disso,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = a(u,v) - L(v), \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Então de (2.6.23) obtém-se

$$a(u,v) - L(v) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Tomando-se $-v$ ao invés de v, conclui-se que

$$a(u,v) - L(v) = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

isto é, u é uma solução de (2.6.15). ■

Conclusão: A partir dos Teoremas 2.2 e 2.3 demonstra-se para uma forma bilinear, contínua, coerciva e simétrica a equivalência entre os problemas:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad u \in V \quad \text{tal que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \text{para todo} \quad v \in V; \end{array} \right. \tag{2.6.24}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad u \in V \quad \text{tal que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \text{para todo} \quad v \in V; \end{array} \right. \tag{2.6.25}$$

Na terminologia do Cálculo Variacional, a identidade (2.6.24) corresponde à Equação de Euler do problema de minimização (2.6.25).

2.6.1 O Problema de Dirichlet Homogêneo

Seja $V = H_0^1(\Omega)$ (2.5.14) com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Define-se:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx,$$

$$\langle f, v \rangle = f(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \text{com} \quad f \in L^2(\Omega).$$

O produto escalar em V fica dado por: $((u,v)) = a(u,v)$. A norma associada escreve-se como:

$$\|v\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = ((v,v))^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $(V, \|\cdot\|_V)$ é um espaço de Hilbert.

Lema 2.3. *As formas $a(u,v)$ e $f(v)$ satisfazem as condições do Teorema de Lax-Milgram 2.2.*
<u>Demonstração</u>: Sejam $u, v \in V$. Então

i) $a(u,v)$ é contínua. De fato, tem-se

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx| + |\int_\Omega u \cdot v \, dx| \\ &= |(\nabla u, \nabla v)| + |(u,v)|, \end{aligned}$$

onde $(\cdot,\cdot)$ é o produto escalar em $L^2(\Omega)$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.4) chega-se a

$$|a(u,v)| \leq |\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}.$$

Daí obtém-se

$$|a(u,v)| \leq (|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\,(|\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Portanto,

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u,v \in V.$$

ii) $a(u,v)$ é coerciva. Seja $u \in V$, logo

$$a(u,v) = |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$a(u,u) = \|u\|^2_V.$$

iii) $f(v)$ é uma forma linear contínua em V (em outras palavras, $f \in V' = (H^1_0(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$). Da desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.4), obtém-se

$$|f(v)| = |(f,v)| \leq |f|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, usando a desigualdade de Poincaré (2.2.5), encontra-se

$$|f(v)| \leq C|f|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V.$$

Logo, como $f \in L^2(\Omega)$, segue-se o resultado desejado, ou seja,

$$|f(v)| \leq C\|v\|_V.$$

■

Do Lema 2.3 e aplicando o Teorema de Lax-Milgram 2.2 encontra-se um único $u \in H^1_0(\Omega)$ satisfazendo o problema variacional

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega u \cdot v\,dx = \int_\Omega f \cdot v\,dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1_0(\Omega). \tag{2.6.26}$$

O problema (2.6.26) é conhecido como a *formulação fraca* do problema de Dirichlet homogêneo

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array}\right.$$

2.6.2 O Problema de Neumann Homogêneo

Seja agora $V = H^1(\Omega)$ (2.5.12) sendo $a(u,v)$ e $f(v)$ como na subseção anterior. Também aqui tem-se $(V, \|\cdot\|_V)$ um espaço de Hilbert. Estando a forma bilinear $a(u,v)$ e o funcional linear $f(v)$ nas condições do Teorema de Lax-Milgram 2.2, existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = f(v), \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega). \tag{2.6.27}$$

Sendo $f \in L^2(\Omega)$, o teorema de regularidade afirma que a solução $u \in H^2(\Omega)$, quando a fronteira de Ω é regular [15]. Logo, usando o *Lema de Green 1.2.6* e tomando $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, encontra-se

$$\int_\Omega [-\Delta u + u] \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx.$$

Portanto, partindo-se da equação acima e do *Lema de Du Bois Raymond 2.2*, tem-se

$$-\Delta u + u = f \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega. \tag{2.6.28}$$

E a condição de contorno? Multiplicando agora (2.6.28) por $v \in H^1(\Omega)$ e integrando, segue-se

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx.$$

Então pelo *Lema de Green 1.2.6*, tem-se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.6.29}$$

De (2.6.27) e (2.6.29), obtém-se

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega).$$

Por meio de uma análise delicada [14], conclui-se que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma.$$

Portanto, $u \in H^2(\Omega)$ satisfaz o problema de Neumann homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Assim como no exemplo anterior, a *formulação fraca* do problema acima está representada pela igualdade (2.6.27).

2.6.3 O Problema Misto Dirichlet-Neumann

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira Γ é tal que: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde Γ_0 possui medida positiva e $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$. Supondo-se Γ suficientemente regular, faz sentido definir a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma_0) \\ v &\longrightarrow \gamma(v) = v_{|\Gamma_0}, \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

denominada *função traço de v sobre* Γ_0 [15].

Demonstra-se que γ é uma aplicação linear e contínua de $H^1(\Omega)$ sobre $L^2(\Gamma_0)$. Portanto, o subespaço $V = \{v \in H^1(\Omega); \quad \gamma v = 0\}$ é fechado em $H^1(\Omega)$, com a norma induzida de $H^1(\Omega)$. Lembre-se que definiu-se

$$\|v\|_V^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \int_\Omega v^2\, dx.$$

Tem-se, então $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$. Considera-se em V a aplicação $T : V \longmapsto \mathbb{R}$, tal que

$$v \longmapsto T(v) = [v], \quad \text{onde} \quad [v] = \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 2.4. *A aplicação $T : V \mapsto \mathbb{R}$ define uma norma em V.*
<u>Demonstração</u>: De fato, se $[v] = 0$ então

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Logo v é constante em Ω. Como $v \in V$ então $v_{|\Gamma_0} = 0$ e, deste modo $v = 0$ em Ω. ■

Proposição 2.5. *Em V as normas $[\cdot]$ e $\|\cdot\|_V$ são equivalentes, isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que:*

$$C_1\|v\|_V \leq [v] \leq C_2\|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

<u>Demonstração</u>: Consulte [15]. ■

Viu-se na subseção anterior que a forma bilinear

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega u \cdot v\, dx.$$

é contínua e coerciva em $H^1(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_V$. Usando a equivalência das normas (Proposição 2.5) em V, obtém-se:

i) $a(u,v)$ é contínua em V;

ii) $a(u,v)$ é coerciva em V.

Portanto, do Teorema de Lax-Milgram 2.2, conclui-se que dado $f \in L^2(\Omega)$ (por exemplo) existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{2.6.31}$$

Analogamente aos exemplos anteriores, partindo de (2.6.31) encontra-se

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Multiplicando-se por $v \in V$ e integrando em Ω, obtém-se

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v\, dx + \int_\Omega u \cdot v\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx.$$

Supondo $u \in H^2(\Omega)$ e pelo *Lema de Green 1.2.6*, segue

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx.$$

Já que $v \in V$, tem-se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx + \int_\Omega u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx. \tag{2.6.32}$$

Então de (2.6.31) e (2.6.32), encontra-se

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dx = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Aqui há outro ponto delicado, mas "interpreta-se" a igualdade acima como sendo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1.$$

Conclui-se que a solução $u \in V$ do problema misto satisfaz

$$\left| \begin{array}{l} u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1. \end{array} \right. \tag{2.6.33}$$

Interpreta-se o problema (2.6.33) como o da posição de equilíbrio de uma membrana Ω fixa ao longo de uma parte Γ_0 de sua fronteira Γ. Obtém-se uma condição de Dirichlet em Γ_0 e Neumann em Γ_1. $\square$

O leitor poderá consultar [14] se tiver interessado na análise de problemas elípticos, como aqueles apresentados nesta sub-seção, com condições de contorno não-homogêneas.

2.7 Exercícios

1. Considerando a relação

$$\|(u_0 - v) + (u_0 - \hat{v})\|_V = \|u_0 - v\|_V + \|u_0 - \hat{v}\|_V. \tag{2.7.34}$$

   Demonstre que (2.7.34) implica na dependência linear de $u_0 - v$ e $u_0 - \hat{v}$, isto é, $u_0 - v = \lambda(u_0 - \hat{v})$ com $\lambda \neq 0$.

2. Demonstre que um espaço vetorial V, dotado de produto escalar $((\cdot,\cdot))$, vale a *Identidade do Paralelograma*, ou seja,

$$\|u - v\|_V^2 + \|u + v\|_V^2 = 2(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2), \tag{2.7.35}$$

   para todo par de vetores u, v de V.

3. Seja V um espaço de Hilbert real e $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear e contínua em V. Demostre que

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(v)|}{\|v\|_V}; \, v \neq 0 \right\},$$

é uma norma para f e que vale a desigualdade

$$|f(v)| \leq \|f\| \|v\|_V.$$

Supondo f diferente da forma nula, mostre que da continuidade da forma linear f tem-se

$$N = \{v \in V;\ f(v) = 0\}$$

um subespaço de Hilbert de V.

4. Represente-se por V' o espaço vetorial das formas lineares contínuas em V . Do Lema de Riesz-Fréchet 2.1 resulta que existe uma isometria J de V em V'. Assim, dadas $f, g \in V'$ demonstre que

$$((f, g))_{V'} = ((J^{-1}f, J^{-1}g)), \tag{2.7.36}$$

define um produto escalar em V'.

5. Represente-se por M o subespaço de V, espaço de Hilbert real, gerado pelo conjunto dos vetores $\{v_{n n\in\mathbb{N}}\}$. Assim, M é o fecho forte em V do conjunto das combinações lineares finitas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Mostrar que M é separável (existe um subconjunto numerável e denso em M).

6. Considere-se a forma linear δ_0 definida em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Verifique a continuidade de δ_0 em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (δ_0 é uma *Distribuição* - massa de Dirac concentrada no ponto zero).

7. Discutir a existência e unicidade de solução do problema

$$\left| \begin{array}{lll} -\Delta u = f & \text{em} & \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.7.37}$$

8. Analogamente ao caso do exercício anterior, considere o problema (2.7.37) condições de Neumann, isto é, $\dfrac{\partial u}{\nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$.

9. O que pode ser dito sobre o problema

$$\left| \begin{array}{lll} -\Delta u + \underline{a} \cdot \nabla u = f & \text{em} & \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.7.38}$$

onde $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ é constante.

10. Demonstrar que se $v \in H_0^1(\Omega)$ então o traço (função traço) de v na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é zero. O traço de v representa-se por $v|_\Gamma$ que se lê v restrito a Γ.

11. Seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de V [7]. Prove, usando a identidade de Parceval, que para todo $v \in V$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |((e_n, v))|^2$$

é convergente.

Capítulo 3

O Problema da Membrana

Foi deduzida no Capítulo 1 a equação da membrana (1.1.5), dada pela seguinte expressão

$$\tau \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + k \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \tag{3.0.1}$$

para toda $u, v \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$. Note-se que $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ é um espaço vago sem uma estrutura topológica definida, e serviu apenas de apoio a imaginações para o trabalho inicial de dedução. O problema (1.1.5) formula-se agora, de modo claro, em um espaço de Sobolev, precisamente, no espaço $H_0^1(\Omega)$, pois a membrana está presa no bordo Γ. Supondo-se $\tau = k = 1$ para simplificar a notação, o problema da membrana consiste em:

Problema M Dada $f \in L^2(\Omega)$, determinar $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \tag{3.0.2}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

3.1 Análise da Solução do Problema da Membrana

Nesta seção analisamos a solução do problema da membrana a partir de uma nova metodologia, que dispensa o uso do Teorema de Lax-Milgram 2.2. Desse modo, a solução do **Problema M** consiste nas etapas:

i) provar que existe uma solução;

ii) provar que a solução é única;

iii) mostrar que a solução depende continuamente dos dados iniciais.

A seguir, demonstrar-se-á que o **Problema M** satisfaz as condições i), ii), iii) ou, de modo equivalente, é *bem posto no sentido de Hadamard* .

Existência: Observando o produto escalar em $H_0^1(\Omega)$ o **Problema M** consiste em determinar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$((u, v)) = \int_\Omega fv \, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.1.3}$$

onde $((u,v)) = \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx + \int_\Omega uv dx$. Observe que fixada a função $f \in L^2(\Omega)$ a aplicação $L_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_f(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, é uma forma linear contínua. Logo, sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert, conclui-se, do Lema de Riesz-Fréchet (2.1), a existência de um vetor $w_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$L_f(v) = ((w_f, v)) \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1.4}$$

De (3.1.3) e (3.1.4), deduz-se que o **Problema M** equivale a dizer que a solução u é tal que

$$((u,v)) = ((w_f, v)), \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

isto é, a solução u do **Problema M** é dada por

$$u = w_f.$$

$\square$

Unicidade: A unicidade da solução é simples. Fixada a função $f \in L^2(\Omega)$, suponha que existam duas soluções u e $\hat{u}$ de (3.1.3), isto é

$$((u,v)) = \int_\Omega f v \, dx, \quad \text{e} \quad ((\hat{u}, v)) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para toda} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Subtraindo-se membro a membro as duas igualdades, encontra-se

$$((u,v)) - ((\hat{u}, v)) = 0 \quad \text{para toda} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Como

$$((u,v)) - ((\hat{u}, v)) = \int_\Omega (\nabla u - \nabla \hat{u}) \nabla v \, dx + \int_\Omega (u - \hat{u}) v \, dx = ((u - \hat{u}, v)),$$

então

$$((u - \hat{u}, v)) = 0 \quad \text{para toda} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando-se $v = u - \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$, obtém-se

$$((u - \hat{u}, u - \hat{u})) = \|u - \hat{u}\|^2_{H^1(\Omega)} = 0$$

provando que $u = \hat{u}$.$\square$

Dependência dos dados: Considere-se a aplicação $\mu : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ associe a única solução do **Problema M**, isto é, $\mu_f = w_f$. Tem-se

$$((\mu_f, v)) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, sendo f e $\hat{f}, \in L^2(\Omega)$, obtém-se

$$((\mu_f - \mu_{\hat{f}}, v)) = (f - \hat{f}, v) \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, tomando $v = \mu_f - \mu_{\hat{f}} \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$((\mu_f - \mu_{\hat{f}}, \mu_f - \mu_{\hat{f}})) = (f - \hat{f}, \mu_f - \mu_{\hat{f}}). \tag{3.1.5}$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz (2.2.4) e de Poincaré (2.2.5) na equação (3.1.5), chega-se a

$$\|\mu_f - \mu_{\hat{f}}\| \leq |f - \hat{f}|$$

mostrando a continuidade da aplicação $f \longrightarrow w_f$ de $L^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$. Diz-se que a solução w_f depende continuamente de f. $\Box$

A partir do *método de aproximações de Galerkin* será demonstrada a existência de solução do **Problema M**. Para mais detalhes consulte [1].

Método de Galerkin - O espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ é separável [15]. Logo constrói-se em $H_0^1(\Omega)$ uma sucessão $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de vetores tais que

a) para cada m os vetores $w_1, w_2, ..., w_m$ são linearmente independentes;

b) as combinações lineares finitas dos w_ν são densas em $H_0^1(\Omega)$.

De posse de tal sucessão demonstra-se a existência de uma solução do **Problema M**. O método de Galerkin é construtivo, isto é, obtém-se a solução como limite de uma sucessão de soluções conhecidas em dimensão finita. Deseja-se construir a solução $u \in H_0^1(\Omega)$ da equação

$$((u, v)) = \int_\Omega f v \, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1.6}$$

Problema Aproximado: Represente-se por V_m o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, ..., w_m$. Tem-se o problema aproximado em dimensão m.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad u_m \in V_m \quad \text{tal que} \\ ((u_m, v)) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para todo} \quad v \in V_m. \end{array} \right. \tag{3.1.7}$$

A etapa seguinte consiste em provar que o sistema linear (3.1.7) possui solução. De fato, sendo $u_m \in V_m$ ele representa-se por

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i,$$

sendo g_{im}, $1 \leq i \leq m$ as coordenadas de u_m na base $w_1, w_2, ..., w_m$ de V_m. Fazendo-se $v = w_j$, $1 \leq j \leq m$, em (3.1.7) obtém-se o sistema equivalente

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_{im} = f_j \quad 1 \leq j \leq m, \tag{3.1.8}$$

sendo

$$a_{ij} = ((w_i, w_j)) \quad \text{e} \quad f_j = \int_\Omega f w_j \, dx.$$

Para provar que (3.1.8) possui solução é suficiente provar que a matriz (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq m$ é inversível. Logo, é suficiente mostrar que se

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_j = 0, \; 1 \leq j \leq m,$$

então $C_1, C_2, ..., C_m = 0$, ou seja, os vetores linha de (a_{ij}) são linearmente independentes. Note que para A uma matriz de V_m com $Au = 0$, $u \in V_m$, tem-se $u = 0$ então A é inversível. Logo, por hipótese tem-se

$$\sum_{j=1}^{m}((w_i, w_j))C_j = 0,$$

isto é,

$$\big((w_i, \sum_{j=1}^{m} C_j w_j)\big) = 0.$$

Multiplicando-se por $C_i > 0$ e adicionando-se, obtém-se

$$((u_m, u_m)) = 0, \quad \text{com} \quad u_m = \sum_{j=1}^{m} C_j w_j \in V_m.$$

portanto, u_m é o vetor nulo de V_m o que implica $C_1 = C_2 = ... = C_m = 0$, provando que (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq m$ é invertível, logo (3.1.8) possui solução u_m.□
Estimativa: A próxima etapa consiste em obter subsucessões para passar ao limite nas equações aproximadas e chegar a solução u de (3.1.6). De fato, considere $v = u_m$ em (3.1.7). Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.4) tem-se

$$((u_m, u_m)) = \int_\Omega f u_m \, dx \leq |f|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{H^1(\Omega)},$$

ou seja

$$\|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \qquad C = |f|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.1.9}$$

A desiguladade (3.1.9) diz que a sucessão de aproximações $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada na norma em $H_0^1(\Omega)$. Em um espaço de Hilbert vale o *Teorema de Bolzano-Weierstrass 2.1* com a convergência fraca [7, 15]. Assim, extrai-se uma subsucessão $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que converge fracamente para u em $H_0^1(\Omega)$. Isto significa dizer que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} ((u_k, v)) = ((u, v)) \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, em (3.1.7) tem-se

$$((u_k, v)) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando o limite quando $k \longrightarrow \infty$ obtém-se a solução do **Problema M**, isto é,

$$((u, v)) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

ou ainda, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Como o problema possui solução única, o limite u não depende da subsucessão escolhida. Sendo a solução u limite fraco da sucessão $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pode-se considerar

u_m como uma aproximação da u. A seguir, calcula-se o erro que se comete ao tomar u_m como valor aproximado de u. Para tanto, seja

$$((u,v)) = \int_\Omega fv\,dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$((u_m,v)) = \int_\Omega fv\,dx \quad \text{para todo} \quad v \in V_m.$$

Sendo $V_m \subset H_0^1(\Omega)$, a primeira igualdade vale para $v \in V_m$, em particular. Logo, subtraindo-se membro a membro, obtém-se

$$((u-u_m,v)) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in V_m.$$

Tomando-se $v = v_m - u_m \in V_m$, tem-se

$$((u-u_m, v_m - u_m)) = 0$$

ou

$$((u-u_m, u-u_m)) = ((u-u_m, u-v_m)).$$

Então, aplicando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.2.4), encontra-se que

$$\|u-u_m\|^2 \le \|u-u_m\|\|u-v_m\|,$$

ou seja,

$$\|u-u_m\| \le \sup_{v_m \in V_m} \|u-v_m\|,. \tag{3.1.10}$$

Deste modo, conclui-se que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in V_m$, dado pelo método de Galerkin, é a melhor aproximação para $u \in H_0^1(\Omega)$. Este resultado, equação (3.1.10), é conhecido na literatura como sendo o *Lema de Cèa*. □

Proposição 3.1. *A função u, única solução do* **Problema M**, *é o único objeto de $H_0^1(\Omega)$ que minimiza o funcional*

$$J(v) = \frac{1}{2}((v,v)) - \int_\Omega fv\,dx \ \ em \ \ H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: A demonstração é análoga aquela apresentada no Teorema 2.3. ■

3.2 Regularidade das Soluções Fracas

Do que acabou de ser demonstrado na seção anterior, a solução do **Problema M** é apenas um objeto do $H_0^1(\Omega)$. Do problema da membrana (1.2.7), apresentado como motivação no Capítulo 1, deduz-se que sua solução u satisfaz as condições do **Problema M**.

Uma pergunta natural seria agora saber *sob quais condições a solução u do* **Problema M** *é solução de (1.2.7)?*. No presente caso simples é verdade quando Ω possui fronteira Γ de classe C^2, sendo consequência da hipótese $f \in L^2(\Omega)$. Tal tipo de problema foi investigado por vários matemáticos, L. Nirenberg, F. E. Browder, S. Agmon, consulte [1]. Para aplicar o método é necessário que a fronteira Γ seja regular, no caso em estudo do **Problema M**, seja C^2. Apenas para dar ao leitor uma mostra do método, o estudo será apresentado para $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.2. *A solução u do* **Problema M**, *pertence a $H_0^1(\Omega)$ mas sendo $f \in L^2(\Omega)$ ela pertence a $H^2(\Omega)$, quando Γ é C^2.*

Demonstração: Seja então $\Omega = \mathbb{R}^n$, ou seja, $\Gamma = \emptyset$. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$, demonstra-se também que se $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ então $u(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \longrightarrow \infty$. Considere-se $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ com $h_\nu > 0, 1 \leq \nu \leq n$.
Represente-se por τ_h a translação

$$\tau_h u(x) = u(x+h), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad x+h \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstra-se inicialmente o seguinte lema.

Lema 3.1. *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\frac{1}{|h|^2_{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h u - u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

Demonstração: É suficiente provar para $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e por densidade segue-se para o $H^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, seja $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e

$$v(t) = u(x+th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tem-se,

$$v'(t) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial y_i} h_i = h.\nabla u(x+th)$$

e

$$v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h.\nabla u(x+th)dt,$$

ou ainda,

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 h.\nabla u(x+th)dt,$$

isto é,

$$|\tau_h u - u| \leq \int_0^1 |h||\nabla u(x+th)|dt \leq |h|_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Finalmente,

$$|\tau_h u - u|^2 \leq |h|^2_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2 dt.$$

Integrando no $\mathbb{R}^n$, obtém-se

$$\frac{1}{|h|^2_{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h u - u|^2 dx \leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x+th)|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^2 dy.$$

□

Voltando à demonstração da Proposição 3.2, escreve-se a equação do **Problema M** sob a forma

$$(\nabla u, \nabla v) + (u, v) = (f, v) \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.11}$$

Calculando-se (3.2.11) em $v(x+h)$ e $v(x)$, subtraindo-se membro a membro e dividindo-se por $|h|_{\mathbb{R}^n}$, obtém-se

$$\frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(\nabla u, \nabla(\tau_h v - v)) + \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(u, (\tau_h v - v)) = \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(f, \tau_h v - v)). \tag{3.2.12}$$

Note-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u[v(x+h) - v(x)]dx = \int_{\mathbb{R}^n} uv(x+h)dx - \int_{\mathbb{R}^n} uv(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x+h)v(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx = (\tau_h u - u, v).$$

Portanto, modifica-se a equação (3.2.12), obtendo-se

$$\frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(\nabla(\tau_h u - u), \nabla v) + \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(\tau_h u - u, v) =$$

$$= \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}(f, \tau_h v - v) \leq \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}|\tau_h v - v|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.2.13}$$

Do Lema 3.1, segue-se

$$\frac{1}{|h|_{R^n}}|\tau_h v - v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{1}{|h|^2_{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h v - v|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} = |\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.2.14}$$

Fazendo

$$D_h u = \frac{1}{|h|_{\mathbb{R}^n}}\tau_h u - u,$$

e usando (3.2.14), re-escreve-se a desigualdade (3.2.13) da seguinte forma

$$(\nabla D_h u, \nabla v) + (D_h u, v) \leq |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomando-se $v = D_h u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, encontra-se

$$|\nabla D_h u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |D_h u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|\nabla D_h u|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Daí, resulta a estimativa

$$|D_h u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{independente de} \quad h. \tag{3.2.15}$$

Então

$$|\nabla D_h u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla D_h u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} D_h u(x)\right)^2 dx =$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(D_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leq |f|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

pela estimativa (3.2.15). Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(D_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leq |f|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Consequentemente, $D_h \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$, independente de h. Portanto, pode-se extrair uma subsucessão

$$\left(D_{h_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

convergente fracamente para um vetor $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$; logo no sentido das distribuições sobre $\mathbb{R}^n$, isto é, no sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Tem-se

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} D_{h_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.2.16}$$

É simples fazer este cálculo; entretanto pode ser encontrado em [5], pg. 20. De (3.2.16) e da unicidade do limite, resulta que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = w \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

para todo $1 \leq i \leq n$, provando que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Portanto a solução u do **Problema M** está em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Aplicando o Lema de Green 1.2.6, obtém-se

$$\int_\Omega [-\Delta u + u] v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

para toda $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Sendo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $-\Delta u + u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta que a solução fraca u é uma solução genuína do problema de Dirichlet em Ω, isto é

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma. \end{array} \right. \tag{3.2.17}$$

Note que no problema (3.2.17) propõe-se a encontrar u solução de $-\Delta u + u = f$ em Ω com $u = 0$ em Γ, isto é, o problema de Dirichlet com condições nulas na fronteira Γ de Ω. Há várias outras condições na fronteira, representando problemas de Física, como àquelas de Neumann ou Mistas, analisadas nos capítulos anteriores. □

As motivações servem para descobrir-se o que é geral no particular exemplo escolhido e isolar o que é permanente. Aliás este é o objetivo da investigação científica, segundo A.N. Whitehead e B. Russel (*Principia da Mathematica*, 1910). Assim, examina-se, a seguir, o exemplo estudado dentro do princípio acima estabelecido.

3.3 Deformações da Membrana com Obstáculos

Nas seções anteriores estudou-se o modelo matemático representando as deformações de uma membrana elástica Ω presa no bordo Γ. Demonstrou-se, com a aplicação do Lema de Riesz-Fréchet 2.1 e pelo método (construtivo) de Galerkin, que o **Problema M** possui uma única solução fraca u no $H_0^1(\Omega)$. Tendo em vista a simetria da forma bilinear

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx,$$

provou-se que a solução fraca u é o único objeto de $H_0^1(\Omega)$ que minimiza em $H_0^1(\Omega)$ o funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} ((v,v)) - \int_\Omega fv \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3.18}$$

e, reciprocamente, o vetor $u \in H_0^1(\Omega)$ que minimiza o funcional (3.3.18) é a única solução fraca do **Problema M** .

Na presente seção estuda-se o problema da deformação de uma membrana elástica porém com um obstáculo sob as posições admissíveis. Formulando de modo claro, tem-se uma função admissível fixa ψ, isto é, deseja-se resolver o problema

Problema MO. Caracterizar o mínimo u de

$$J(v) = \frac{1}{2}((v,v)) - \int_\Omega f v\, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega)$$

em $H_0^1(\Omega)$, de modo que $v \geq \psi$ em Ω, com $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \geq 0$.

Antes de estudar este problema examinam-se alguns casos que facilitam a compreensão da solução a ser encontrada.

i) Suponha u como objeto de $C^1([a,b];\mathbb{R})$, com um mínimo em x_0 pertencente a $[a,b]$. Note $-\infty < a < b < \infty$. Então tem-se:

$$u'(x_0) = 0 \quad \text{se} \quad a < x_0 < b$$

$$u'(x_0) \geq 0 \quad \text{se} \quad a = x_0$$
$$u'(x_0) \leq 0 \quad \text{se} \quad b = x_0.$$

Estas três condições permitem caracterizar o ponto de mínimo x_0 pela inequação
$$u'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad a \leq x \leq b.$$

Note que o intervalo compacto $[a,b]$ é um convexo da reta. A seguir considera-se o caso n-dimensional.

ii) Seja K um conjunto convexo do $\mathbb{R}^n$ e u uma função de $C^1(K;\mathbb{R})$. Suponha que u possui um mínimo em um ponto x_0 de K, isto é,

$$u(x_0) = \min_{x \in K} u(x).$$

Sendo K convexo, se y for um ponto qualquer de K e $0 \leq \lambda \leq 1$, resulta que o ponto $(1-\lambda)x_0 + \lambda y$ pertence a K. Considere-se a função $U : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$U(\lambda) = u((1-\lambda)x_0 + \lambda y).$$

Logo,
$$U(0) = u(x_0) = \min_{x \in K} u(x).$$

Deste modo,
$$U(0) = u(x_0) \leq u((1-\lambda)x_0 + \lambda y) = U(\lambda),$$

pois $u(x_0)$ é o valor mínimo de u em K. Sendo a desigualdade válida para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, resulta que $U(0)$ é o valor mínimo de $U(\lambda)$.

Pelo caso *i)* tem-se $U'(0) \geq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Isto é, o mínimo é caracterizado por $U'(0) \geq 0$. Calculando $\frac{dU}{d\lambda}$ no ponto $\lambda = 0$, encontra-se

$$U'(0) = \nabla u(x_0).(y - x_0),$$

sendo $\alpha.\beta$ o produto escalar no $\mathbb{R}^n$. Portanto o mínimo é caracterizado pela inequação
$$\nabla u(x_0).(y - x_0) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad y \in K.$$

Retornando-se ao problema da membrana com obstáculo, **Problema MO**, note-se que tomando-se ψ em $H_0^1(\Omega)$ e $\psi \geq 0$, o conjunto

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \psi \text{ em } \Omega\}$$

é um convexo de $H_0^1(\Omega)$.

Para resolver o **Problema MO** utilizamos as duas proposições que são apresentadas a seguir. Porém, antes disso, suponha que $J(v)$ assuma o valor mínimo em $u \in K$. Se $v \in K$, o vetor $(1-\lambda)u + \lambda v \in K$. Considerando-se a função real

$$g(\lambda) = J((1-\lambda)u + \lambda v), \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

calcula-se

$$g'(0) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{1}{\lambda}(g(\lambda) - g(0)) \quad \text{com} \quad \lambda > 0.$$

Pelos casos $i)$ e $ii)$, determina-se que $u \in K$ minimizando $J(v)$ em K, satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla (v-u)\, dx + \int_\Omega u.(v-u)\, dx \geq \int_\Omega f.(v-u)\, dx \tag{3.3.19}$$

A inequação (3.3.19) escreve-se sob a forma mais *cômoda*

$$((u, v-u)) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in K. \tag{3.3.20}$$

A expressão (3.3.20) é conhecida como *inequação variacional do Problema MO* . □

Do que se acabou de mostrar conclui-se o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *Se $u \in K$ minimiza o funcional $J(v)$ em K então u satisfaz a inequação variacional (3.3.20).*

Também é possível mostrar que vale *a volta* da Proposição 3.3.

Proposição 3.4. *Se $u \in K$ satisfaz a inequação variacional (3.3.20) para todo $v \in K$, então u minimiza o funcional $J(v)$ em K.*

Demonstração: Do fato de K ser convexo é possível ver que $J(v)$ é um funcional convexo, isto é,

$$J((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)J(u) + \lambda J(v), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Daí resulta que para qualquer $v \in K$, tem-se

$$J(v) - J(u) \geq \frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u + \lambda v) - J(u)]$$

com $\lambda > 0$. Tomando-se o limite quando $\lambda \longrightarrow 0$, obtém-se

$$J(v) - J(u) \geq ((u, v-u)) - (f, v-u) \geq 0,$$

para todo $v \in K$, provando que $J(u)$ é o mínimo. ■

Conclusão: Usando-se Proposições 3.3 e 3.4 chega-se a equivalência entre os problemas

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad u \in K \quad \text{talque} \\ ((u, v-u)) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in K, \end{array} \right. \tag{3.3.21}$$

onde $((u, v-u)) = (\nabla u, \nabla(v-u)) + (u, v-u)$ e

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar} \quad u \in K \quad \text{minimizando o funcional} \\ J(v) = \frac{1}{2}((v,v)) - (f,v), \quad \text{em} \quad K. \end{array} \right. \tag{3.3.22}$$

Proposição 3.5. *Se $f \in L^2(\Omega)$ a solução do problema variacional (3.3.21) pertence a $K \cap H^2(\Omega)$.*
Demonstração: Veja [1].

Uma aplicação imediata da Proposição 3.5 é que a solução u da inequação variacional (3.3.21) satisfaz o problema

$$\left|\begin{array}{l} u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + u \geq f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u \geq \psi \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{array}\right. \tag{3.3.23}$$

Uma generalização do problema exposto nesta subseção é dada por: *Seja $a(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear em V, $(V, \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert e L uma forma linear e contínua ($L \in V'$), tal que*

$$a(u, v-u) \geq \langle L, v-u \rangle_{V' \times V'}, \quad \textit{para todo} \quad v \in K, \tag{3.3.24}$$

onde $K \subset V$ é um convexo fechado.

A questão que se impõe é - quais as hipóteses deverão ser feitas sobre $a(\cdot,\cdot)$ para que o problema variacional abstrato (3.3.24) possua uma única solução $u \in K$? O teorema que será apresentado a seguir responderá a esta pergunta.

Teorema 3.1 (Teorema de Lions-Stampacchia)**.** *Seja $a(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em V e $K \subset V$ um convexo fechado. Então para cada $L \in V'$ existe um único $u \in K$ satisfazendo a inequação variacional (3.3.24).*
Demonstração: Prova-se primeiro a unicidade e depois a existência. Sejam u_1 e u_2 soluções de (3.3.24), tem-se

$$a(u_1, v-u_1) \geq \langle L, v-u_1 \rangle_{V' \times V'}, \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

$$a(u_2, v-u_2) \geq \langle L, v-u_2 \rangle_{V' \times V'}, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Fazendo-se $v = u_2$ na primeira desigualdade e $v = u_1$ na segunda, subtraindo-se as duas e levando-se em conta a coercividade da forma $a(\cdot,\cdot)$, obtém-se

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Consequentemente, $u_1 = u_2$ já que $\alpha > 0$.

Para provar a existência, reduz-se o problema (3.3.24) a um problema de ponto-fixo. Do Lema de Riesz-Fréchet 2.1, existe um único $A \in L(V,V)$ (representa-se por $L(V,V)$ o conjunto dos funcionais lineares e contínuos de V em V) e $l \in V$ tais que

$$(A(u), v) = a(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

e

$$\langle L, v \rangle_{V' \times V'} = L(v) = (l, v), \quad \forall v \in V.$$

Então o problema variacional (3.3.24) é equivalente a encontrar $u \in V$ tal que

$$(u - \rho(Au - l) - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K, \quad u \in K, \quad \rho > 0,$$

ou seja, equivale a encontrar u tal que

$$u = P_K(u - \rho(Au - l)), \quad \text{para algum} \quad \rho > 0,$$

onde P_K denota o operador projeção de V em K na norma $\|\cdot\|$. Considere a aplicação $W_\rho : V \mapsto V$ definida por

$$W_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - l)).$$

Sejam $v_1, v_2 \in V$, já que P_K é uma contração, obtém-se

$$\|W_\rho(v_2) - W_\rho(v_1)\|^2 \leq \|v_2 - v_1\|^2 - 2\rho a(v_2 - v_1, v_2 - v_1) + \rho^2\|A(v_2 - v_1)\|^2.$$

Portanto,

$$\|W_\rho(v_2) - W_\rho(v_1)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|A\|^2)\|v_2 - v_1\|^2.$$

Logo, W_ρ torna-se uma contração estritamente uniforme se $0 \leq \rho \leq 2\alpha\|A\|^2$. Considerando-se ρ variando neste intervalo tem-se uma única solução do problema de ponto-fixo implicando na existência de uma solução para (3.3.24). ■

Do que se acabou de demonstrar observa-se

i) Se $K = V$ então a inequação variacional (3.3.23) transforma-se na equação variacional clássica

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{para todo} \quad v \in V,$$

reduzindo-se, neste caso, o Teorema de Lions-Stampacchia 3.1 no Teorema de Lax-Milgram 2.2.

ii) As inequações variacionais elípticas (introduzidas aqui) algumas vezes ocorrem com formas bilineares *não simétricas* em modelos matemáticos para os seguintes problemas

$\Rightarrow$ fenômenos de lubrificação;

$\Rightarrow$ filtragem de líquidos em meios porosos;

$\Rightarrow$ escoamentos irrotacionais em duas dimensões.

A título de informação recomenda-se a consulta dos livros [17] e [6].

Conclui-se chamando a atenção do leitor que as inequações variacionais foram investigadas inicialmente por G. Stampacchia, J.L. Lions, H. Brezis, G. Duvaut e outros, constituindo um aspecto fascinante do Cálculo de Variações dos nossos dias. Consulte a título de informação o texto em [8].

3.4 Exercícios

1. Demonstre a Proposição (3.1).

2. Seja $k \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Mostrar que $u \in K$ minimizando o funcional $J(v)$ (3.3.18) em K, satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(v - u)\, dx + \int_\Omega u.(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f.(v - u)\, dx \tag{3.4.25}$$

3. Do fato de K ser convexo é possível ver que $J(v)$ é um funcional convexo, isto é,

$$J((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Deste modo, mostre que se $v \in K$, então

$$J(v) - J(u) \geq \frac{1}{\lambda}[J((1 - \lambda)u + \lambda v) - J(u)]$$

com $\lambda > 0$.

Capítulo 4

Problemas de Evolução

4.1 Equação Linear de Ondas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira Γ com regularidade $\mathcal{C}^2$. Para $T > 0$, número real, considera-se o cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por $\Omega \times (0,T) = Q$, cuja fronteira lateral é $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Com $\Delta\cdot$ denota-se o operador *Laplaciano* definido por (com as derivadas no sentido das distribuições)

$$\Delta\cdot = \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_n^2}.$$

Representa-se por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um ponto do $\mathbb{R}^n$ e por $u = u(\mathbf{x}, t)$ uma função definida em $(\mathbf{x}, t) \in Q$ com valores em $\mathbb{R}$. Por u' e u'' tem-se as derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Relembre-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço de funções $\mathcal{C}^\infty$ em Ω com suporte compacto em Ω. Com $H^m(\Omega)$ representa-se o espaço de Sobolev de ordem $m \in \mathbb{N}$ e $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. As funções $u \in H_0^1(\Omega)$ possuem traço zero em Γ.

4.1.1 Existência e Unicidade de Solução

Pretende-se aqui analisar, sob o ponto de vista de existência e unicidade, o seguinte problema :

$$\begin{aligned} u''(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{x},t), \quad \text{em} \quad Q, && (4.1.1)\\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, && (4.1.2)\\ u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}), \qquad u'(\mathbf{x},0) = u_1(\mathbf{x}), && (4.1.3) \end{aligned}$$

onde as funções u_0 e u_1 são conhecidas. A primeira questão é saber em que sentido considera-se $u = u(\mathbf{x}, t)$ solução do problema (4.1.1)-(4.1.3).

Para tornar clara a exposição será fixada alguma notação. Considere um espaço de Banach X e $1 \leq p \leq \infty$. Representa-se por $L^p(0,T;X)$ o espaço das funções $t \longrightarrow f(t)$ de $(0,T) \longrightarrow X$ limitadas e mensuráveis, tais que $\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty$. A norma em $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p < \infty$ é dada por

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \Big)^{1/p}.$$

Para $p=\infty$ define-se

$$\operatorname*{supess}_{0<t<T}\|f(t)\|_X=\|f\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Demonstra-se que $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach para $1\le p\le\infty$. $\square$

Observa-se que o problema (4.1.1)-(4.1.3), para o operador de ondas $u\to u''-\Delta u-f$ contém uma condição na fronteira Σ do cilindro Q (4.1.2) e uma condição inicial (4.1.3). Por esta razão diz-se que (4.1.1)-(4.1.3) é um *problema misto.*

Definição 4.1. *Denomina-se solução fraca do problema misto (4.1.1)-(4.1.3) uma função $u:Q\longrightarrow\mathbb{R}$, com a seguinte regularidade:*

$$u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\qquad u'\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

satisfazendo a igualdade:

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)+((u(t),v))=(f(t),v),\quad\forall v\in H_0^1(\Omega)\tag{4.1.4}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$ e as condições iniciais dadas em (4.1.3).

Observações:

1. Observa-se que $((u,v))$ representa o produto escalar de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$((u,v))=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx.$$

2. Também nota-se que $f=g$ no sentido de $\mathcal{D}^{'}(0,T)$ equivale a dizer que

$$\int_0^T f\cdot\theta dt=\int_0^T g\cdot\theta dt,\quad\forall\theta\in\mathcal{D}(0,T).$$

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade)**.** *Dados $f\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0\in H_0^1(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca do problema (4.1.1)-(4.1.3).*

Demonstração: Sabe-se que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável. Logo, existe uma sucessão $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vetores w_j de $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo as condições:

i) Para cada $m\in\mathbb{N}$, os valores $w_1,w_2,\dots,w_m$ são linearmente independentes;

ii) As combinações lineares finitas dos w_j são densas em $H_0^1(\Omega)$.

Essa sucessão $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vetores w_j de $H_0^1(\Omega)$, satisfazendo as condições $i)$ e $ii)$, denomina-se uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$. De posse da base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$, emprega-se o método de Faedo-Galerkin para a obtenção de um sistema aproximado do problema (4.1.1)-(4.1.3). Considera-se o subespaço $V_m=[w_1,w_2,\dots,w_m]$ de $H_0^1(\Omega)$, gerado pelos m primeiros vetores da sucessão $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. O problema aproximado de (4.1.1)-(4.1.3) consiste em determinar $u_m(t)\in V_m$ solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(u_m''(t),v)\quad+\quad((u_m(t),v))=(f(t),v)\quad\forall v\in V_m,\tag{4.1.5}$$

$$u_m(0)\quad=\quad u_{0m}\quad\text{em}\quad H_0^1(\Omega),\tag{4.1.6}$$

$$u_m^{'}(0)\quad=\quad u_{1m}\quad\text{em}\quad L^2(\Omega),\tag{4.1.7}$$

onde u_{0m} e u_{1m} são definidos a seguir. Observa-se que se $u_m(t)\in V_m$ então $u_m(t)=\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j$. Logo, em (4.1.5)-(4.1.7) calcula-se

- $((u_m(t), v)) = \int_\Omega \nabla u_m(t) \cdot \nabla v dx$ que é o produto escalar em $H_0^1(\Omega)$;
- $(u''_m(t), v) = \int_\Omega \nabla u''_m(t) \cdot \nabla v dx$ que é o produto escalar em $L^2(\Omega)$;
- Por hipótese $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, logo $u_0 = \sum_j^\infty ((u_0, w_j))w_j$. Portanto,

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m ((u_0, w_j))w_j \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

- De modo análogo, tem-se

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Devemos provar que o sistema de equações ordinárias (4.1.5)-(4.1.7) possui solução. Note que ele é linear, o que torna mais simples o problema. Considerando $v = w_j \in V_m$ no sistema (4.1.5)-(4.1.7) e substitua $u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i$ em (4.1.5), obtém-se

$$\sum_{i=1}^m g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t)((w_i, w_j)) = (f, w_j). \tag{4.1.8}$$

Da ortonormalização de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$(w_i, w_j) = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad (w_i, w_j) = 1 \quad \text{se} \quad i = j,$$

tem-se de (4.1.8) a equação

$$g''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\|w_i\|^2_{H^1(\Omega)} = (f, w_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.1.9}$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (contínua) então $|w_j|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_j\|$. Logo, é possível normalizar $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo, tem-se que os $g_{jm}(t)$ são solução do seguinte sistema de equações ordinárias

$$g''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t) = (f, w_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.1.10}$$

Condições iniciais para (4.1.10) são dadas por

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(0)w_j = u_{0m} = \sum_{j=1}^m ((u_0, w_j))w_j,$$

de onde concluí-se

$$g_{jm}(0) = ((u_0, w_j)), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.1.11}$$

Além disso, de forma análoga, define-se

$$u'_m(0) = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(0)w_j = u_{1m} = \sum_{j=1}^m (u_1, w_j)w_j,$$

de onde resulta

$$g'_{jm}(0) = (u_1, w_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.1.12}$$

Deste modo, resolver (4.1.5)-(4.1.7) consiste em determinar as funções $g_{jm}(t)$, $j = 1, \ldots, m$ solução do sistema de m equações diferenciais ordinárias lineares (4.1.10) de segunda ordem, com condições iniciais (4.1.11)-(4.1.12). Sabe-se que existe uma única solução $g_{jm}(t)$, $j = 1, \ldots, m$, definida em $[0, T]$, para todo $T > 0$ [10]. Consequentemente, conclui-se que o sistema aproximado (4.1.5)-(4.1.7) possui uma única solução $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$, definida em $[0, +\infty)$. Devemos considerar limites quando $m \mapsto \infty$ para as soluções aproximadas $u_m(t)$. Para tal, necessitamos de estimativas, as quais passamos a calcular a seguir.

Seja $v = u'_m(t) \in V_m$ em (4.1.5), obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |f(t)|_{L^2(\Omega)}|u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.1.13}$$

Integrando-se (4.1.13) de 0 a t

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\frac{1}{2}|u_1|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t |f(s)|_{L^2(\Omega)}|u'_m(s)|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} |f(s)|_{L^2(\Omega)}|u'_m(s)|_{L^2(\Omega)} &= \sqrt{|f(s)|_{L^2(\Omega)}}\sqrt{|f(s)|_{L^2(\Omega)}}|u'_m(s)|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\frac{1}{2}|f(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|f(s)|_{L^2(\Omega)}|u'_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Sendo $f \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$, de (4.1.14) e (4.1.15) resulta que

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq K + \int_0^1 |f(s)|_{L^2(\Omega)}|u_m(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds, \tag{4.1.16}$$

com $K > 0$ constante. A inequação (4.1.16) é do tipo

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \eta(s)\varphi(s) ds, \tag{4.1.17}$$

com $\varphi(t) = |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2$. A seguir prova-se que $\varphi(t)$ solução de (4.1.17) é limitada. De fato, dividindo ambos os membros de (4.1.17) por $K + \int_0^t \eta(s)\varphi(s)ds > 0$, multiplicando por $u_m(t)$ e observando o Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue, obtém-se

$$\eta(t)\varphi(t) \leq \frac{d}{dt}\big(K + \int_0^t \eta(s)\varphi(s) ds\big).$$

Integrando de 0 a $t \leq T$ tem-se

$$\log\big(K + \int_0^\sigma \eta(s)\varphi(s) ds\big)\big|_{\sigma=0}^{\sigma=t} \leq \int_0^T \eta(s) ds.$$

resultando em

$$\log\big(K+\int_0^t \eta(s)\varphi(s)ds\big)-\log K\leq \int_0^T \eta(s)ds.$$

Logo, chega-se-a

$$K+\int_0^t \eta(s)\varphi(s)ds\big)\leq K\exp^{\int_0^T\ \eta(s)ds}. \tag{4.1.18}$$

Portanto, de (4.1.17)-(4.1.18) tem-se

$$\varphi(t)\leq K\exp^{\int_0^T\ \eta(s)ds}. \tag{4.1.19}$$

De (4.1.19) obtém-se a primeira estimativa, para todo $t>0$, ou seja

$$|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\leq C. \tag{4.1.20}$$

A seguir, de (4.1.20) concluí-se que

$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.1.21}$$
$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{4.1.22}$$

Portanto, de (4.1.21)-(4.1.22) extrai-se uma subsucessão $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e define-se uma função $u: Q\mapsto\mathbb{R}$ satisfazendo as condições

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{fraco} \quad \text{estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \tag{4.1.23}$$
$$u_\mu' \rightharpoonup u' \quad \text{fraco} \quad \text{estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.1.24}$$

pois os espaços $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ são Banach separáveis [15, 1] Considerando-se que

$$H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset (L^2(\Omega))'\subset (H_0^1(\Omega))'$$

sendo E' o dual do espaço de Banach E. Identificando $L^2(\Omega)$ ao seu dual $(L^2(\Omega))'$, obtém-se das inclusões acima que

$$H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset (H^{-1}(\Omega)),$$

onde representa-se o dual de $H_0^1(\Omega)$ $((H_0^1(\Omega))'$ por $H^{-1}(\Omega)$. Portanto, o espaço $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ se identifica ao seu dual forte de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ [1]. Logo, de (4.1.23) escreve-se

$$\int_0^T < u_\mu(t),w(t)>_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\ dt\longrightarrow \int_0^T < u(t),w(t)>_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\ dt, \tag{4.1.25}$$

para toda $w(t)\in H^{-1}(\Omega)$. Portanto, restringido $w(t)$ a $L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$, tem-se $< u_\mu(t),w(t) >= (u_\mu(t),w(t))$, produto escalar no $L^2(\Omega)$, pelo *Lema de Riesz-Fréchet* 2.1, pois $u_\mu(t)\in H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, resulta de (4.1.25), para $w(t)\in L^2(\Omega)$, que a dualidade reduz-se a um produto escalar no $L^2(\Omega)$. Desse modo, de (4.1.25), para todo $w(t)\in L^2(\Omega)$, tem-se

$$\int_0^T (u_\mu(t),w(t))\,dt\longrightarrow \int_0^T (u(t),w(t))\,dt. \tag{4.1.26}$$

Por outro lado, para $w(t) \in L^2(\Omega)$ existe $v(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tal que $-\Delta v(t) = w(t)$, devido a regularidade da solução do problema de Dirichlet para o Laplaciano $(-\Delta)$, com condições de Dirichlet nulas na fronteira de Ω. Portanto, substituindo $w(t)$ por $-\Delta v(t)$ em (4.1.26), obtém-se

$$\int_0^T (u_\mu(t), -\Delta v(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), -\Delta v(t))\, dt.$$

Finalmente, pelo Lema de Green 1.2.6 , já que $u_\mu(t)$ e $u(t)$ pertencem a $H_0^1(\Omega)$, chega-se ao seguinte resultado, válido para toda $v(t) \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_0^T ((u_\mu(t), v(t)))\, dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t), v(t)))\, dt. \tag{4.1.27}$$

A seguir, da convergência em (4.1.24), concluí-se que para toda $v(t) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_0^T (u'_\mu(t), v(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v(t))\, dt. \tag{4.1.28}$$

Considerando agora $m = \mu$ no sistema aproximado (4.1.5), multiplicando ambos os membros por $\theta \in D(0,T)$ e integrando em $(0,T)$, obtém-se para toda $v \in V_m \subset H_0^1(\Omega)$

$$-\int_0^T (u'_\mu(t), v)\theta'\, dt + \int_0^T ((u_\mu(t), v))\theta(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\, dt. \tag{4.1.29}$$

Fazendo $\mu \longrightarrow \infty$ em (4.1.29) e usando as convergências obtidas até aqui, tem-se para toda $v \in V_m$ e $\theta(t) \in D(0,T)$

$$-\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\, dt + \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\, dt. \tag{4.1.30}$$

Sendo as combinações lineares finitas de vetores de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densas em $H_0^1(\Omega)$, resulta de (4.1.30) e (4.1.17) que a função $u : Q \mapsto \mathbb{R}$ obtida é solução do problema (4.1.1)-(4.1.3), isto é, $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)$, $u' \in L^\infty(0,t; L^2(\Omega))$ e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\big(u'(t), v\big) + ((u(t), v)) = (f(t), v),$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $D^{'}(0,T)$. A seguir, provamos que esta função satisfaz as condições iniciais do problema, i.e., $u(0) = u_0$ e $u'(0) = u_1$ em Ω.

Das hipóteses $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ e $u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ resulta que $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ [1]. Portanto, faz sentido calcular $u(0)$. Demonstra-se agora que $u(0) = u_0$. De fato, da estimativa (4.1.6) , sendo $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ conclui-se que (u_m) é limitada em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. Então existe uma subsucessão $(u_\mu) \subset (u_m)$ tal que

$$\int_0^T (u_\mu(t), w) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w) dt, \quad \forall w \in L^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

Em particular, toma-se $w = \theta' v$, com $v \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Logo, substituindo $w = \theta' v$ na última equação tem-se

$$\int_0^T (u_\mu(t), v)\theta' dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta' dt.$$

De (4.1.5), obtém-se

$$\int_0^T (u'_\mu(t), v)\theta' dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta' dt,$$

para a mesma função θ escolhida anteriormente. Adicionando membro a membro as duas últimas equações, vem que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_\mu(t), v)\theta(t)]dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[(u(t), v)\theta(t)]dt = 0.$$

Integrando de 0 a T, segue

$$(u_\mu(0), v) \longrightarrow (u(0), v), \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

De (4.1.6), sendo $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, resulta

$$(u_\mu(0), v) \longrightarrow (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Das duas últimas convergências e da unicidade do limite concluí-se que $u(0) = u_0$ no sentido de $L^2(\Omega)$. Prova-se em seguida que $u'(0) = u_1$. Para isso deve-se verificar, inicialmente, que faz sentido calcular $u'(0)$. De fato, observe-se (4.1.4) que é possível calcular

$$-\int_0^T (u'(t), v)\theta' dt + \int_0^T < -\Delta u(t), v > \theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt,$$

ou ainda,

$$\langle -\int_0^T u'(t)\theta' dt, v\rangle = \langle \int_0^T g(t)\theta dt, v\rangle, \tag{4.1.31}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ com

$$g(t) = \Delta u(t) + f(t) \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

pois $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ e $-\Delta : H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$. Portanto, da igualdade (4.1.31) resulta

$$-\int_0^T u'(t)\theta' dt = \int_0^T g(t)\theta dt, \tag{4.1.32}$$

no sentido de $H_0^1(\Omega)$. Note que u é uma distribuição vetorial e u', u'' suas derivadas. De (4.1.32) deduzimos que $u'' = g$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Sendo $g \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$, resulta que $u'' \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Além disso,

$$u' \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

concluindo-se que $u' \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ e fazendo sentido calcular

$$u'(0) \in H^{-1}(\Omega).$$

Com o objetivo de chegar a identidade $u'(0) = u_1$, considere $\delta > 0$ e defina a função $\theta_\delta \in H_0^1(\Omega)$ como segue

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -t/\delta + 1 & \text{se} \quad 0 \le t \le \delta \\ 0 & \text{se} \quad \delta < t < T. \end{cases}$$

Multiplique ambos os membros da equação aproximada (4.1.5) por $\theta_\delta(t)$ e integre em $(0,T)$. Obtém-se para $m=\mu$, índice das sucessões, que

$$\int_0^\delta (u''_\mu(t),v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta ((u_\mu(t),v))\theta_\delta(t)dt = \int_0^\delta (f(t),v)\theta_\delta(t)dt, \qquad (4.1.33)$$

para todo $v \in V-m$. Integrando-se (4.1.33) por partes e observando a definição de $\theta_\delta(t)$ tem-se

$$-(u'_\mu(0),v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'_\mu(t),v)dt + \int_0^\delta ((u_\mu(t),v))\theta_\delta(t)dt = \int_0^\delta (f(t),v)\theta_\delta(t)dt.$$

Quando $\mu \longrightarrow \infty$, com $v \in V_m$, resulta

$$-(u'_\mu(0),v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'_\mu(t),v)dt + \int_0^\delta ((u(t),v))\theta_\delta(t)dt = \int_0^\delta (f(t),v)\theta_\delta(t)dt, \qquad (4.1.34)$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, pois V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$. Fazendo $\delta \longrightarrow 0$ em (4.1.34) e, novamente, observando o Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue, chega-se em

$$-(u_1,v) + (u'(0),v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

provando que $u'(0)=u_1$ no sentido de $H_0^1(\Omega)$.

Finalmente, prova-se a unicidade da solução. Suponha que u e v sejam duas soluções do problema (4.1.1)-(4.1.3). Então $u-v=w$ é solução de

$$\begin{aligned} w''(\mathbf{x},t) \quad & -\Delta w(\mathbf{x},t) = 0, \quad \text{em} \quad Q, && (4.1.35)\\ w \quad & = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, && (4.1.36)\\ w(\mathbf{x},0) \quad & = 0 \quad w(\mathbf{x},0) = 0. && (4.1.37) \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $w=0$ ou $u=v$. A demonstração não é simples, consulte, por exemplo [11]. A solução $w \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $w' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $w'' = \Delta w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Portanto, não faz sentido compor $w'' \in H^{-1}(\Omega)$ com $w' \in L^2(\Omega)$ porque $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Assim há uma dificuldade para provar a unicidade, ou seja, solução nula para o problema (4.1.35)-(4.1.37), mesmo neste caso linear de soluções fracas. Entretanto, fazemos apenas uma demonstração *formal*. Multiplica-se ambos os membros de (4.1.35) por w' e integra-se em $\Omega \times (0,T)$, para todo $T \geq 0$, tem-se

$$\int_0^T (w''(t),w'(t))dt + \int_0^T ((w(t),w'(t)))dt = 0.$$

Segue então que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}|w'(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt = 0.$$

Calculando as integrais, considerando as condições (4.1.37), obtém-se

$$|w'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(t)\|^2_{H^1(\Omega)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Daí resulta que $w \equiv 0$ ou seja $u=v$. ∎

4.1.2 Regularidade da Solução

Teorema 4.2. *Considere-se*

$$f, f' \in L^1(0,T;L^2(\Omega)); \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega); \quad u_1 \in H_0^1(\Omega).$$

Então existe uma única solução de (4.1.1)-(4.1.3) tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^2(\Omega)); \quad u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad e \quad u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração: Será empregada aqui a mesma metodologia da demonstração do Teorema 4.1. Considera-se uma base Hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Constrói-se uma solução aproximada por meio do sistema

$$(u_m''(t), v) + ((u_m(t), v)) = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m, \quad t \in (0,T). \tag{4.1.38}$$

Devido a regularidade de u_0 e u_1, obtém-se as condições iniciais de (4.1.38) como sendo

$$u_m(0) = \quad u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad \text{forte} \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{4.1.39}$$
$$u_m'(0) = \quad u_1 \longrightarrow u_1 \quad \text{forte} \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{4.1.40}$$

Desse modo, obtém-se uma estimativa suplementar àquelas encontradas no Teorema 4.1. De fato, observe que a hipótese sobre f agora resulta que $f \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, fazendo sentido $f(0) \in L^2(\Omega)$. De (4.1.39), sendo a norma de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ equivalente à norma $L^2(\Omega)$ do Laplaciano, resulta que $|\Delta u_{0m}|_{L(\Omega)}$ é limitada por uma constante $C > 0$. Portanto, fazendo $t = 0$ em (4.1.38) e $v = u_m''(0)$, tem-se

$$|u_m''(0)|^2_{L^2(\Omega)} \le \big(|f(0)|_{L^2(\Omega)} + |\Delta u_{0m}|_{L^2(\Omega)}\big)|u_m''(0)|_{L^2(\Omega)},$$

resultando

$$|u_m''(0)|_{L^2(\Omega)} \le C, \tag{4.1.41}$$

independente de $m \in \mathbb{N}$. Para estimar $u_m''(t)$ deriva-se em relação à t ambos os membros de (4.1.38) com $v = u_m''(t) \in V_m$, obtendo-se

$$\frac{d}{dt}\big(|u_m''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\big) \le 2|f'(t)|_{L^2(\Omega)}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.1.42}$$

De modo análogo aos cálculos desenvolvidos em (4.1.15), encontramos

$$2|f'(t)|_{L^2(\Omega)}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} = 2\sqrt{|f'(t)|_{L^2(\Omega)}}\sqrt{|f'(t)|_{L^2(\Omega)}}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$|f^{'}(t)|_{L^2(\Omega)} + |f^{'}(t)|_{L^2(\Omega)}|u^{''}_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.1.43}$$

Portanto, substituindo (4.1.43) em (4.1.42) e integrando de 0 a T, tem-se

$$|u_m''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m'(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \le |u_m''(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m'(0)\|^2 +$$
$$\int_0^T |f'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma + \int_0^T |f'(\sigma)|_{L^2(\Omega)}|u_m''(t)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma. \tag{4.1.44}$$

De (4.1.39) e da hipótese $|f(t)|_{L(\Omega)} \in L^1(0,T)$ é possível empregar um argumento similar ao usado na desigualdade (4.1.16) em (4.1.44) e concluir que

$$(u_m'') \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.1.45}$$
$$(u_m') \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.1.46}$$

Finalmente, das convergências acima juntamente com as estimativas (4.1.33), válidas também para o caso regular, tem-se a existência de $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)); \quad u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Resta verificar que $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. Do Teorema 4.1, temos que $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$. Vamos mostrar que $u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega))$, para o caso $u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), f, f' \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$. De fato, demonstrou-se a partir de (4.1.32) que $u'' = \Delta u + f$ no sentido das distribuições vetoriais, logo

$$\Delta u = u'' - f \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{4.1.47}$$

Prova-se então que $u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega))$. ■

4.2 Equação do Calor

O texto apresentado nesta seção baseia-se nas notas publicadas por L. A. Medeiros e M. Milla Miranda [15], onde detalhes sobre o argumento aplicado na solução da *equação do calor* encontram-se no Capítulo 1.

Denota-se, como anteriormente, $Q = \Omega \times (0,T)$ o cilindro de fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Portanto, o *Problema Parabólico* a ser estudado é ilustrado pela equação do calor descrita por: dadas $f \in L^2(\Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$, encontrar a função real $u = u(x,t)$ definida em Q , satisfazendo às seguintes condições

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{em} \quad Q \tag{4.2.48}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4.2.49}$$
$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma. \tag{4.2.50}$$

Inicia-se formulando o conceito de solução. Para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ considere-se a forma bilinear

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

É possível verificar que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = a(u,u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$. Entende-se por *solução fraca do problema parabólico* (4.2.48)-(4.2.50) uma função $u : (0,T) \longrightarrow H_0^1(\omega)$ tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

sendo a igualdade entendida no sentido das distribuições sobre $(0,T)$. Assim, enuncia-se o seguinte teorema, que é o principal resultado dessa seção.

Teorema 4.3. *Dadas*

$$f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \quad u_0 \in L^2(\Omega),$$

existe uma única u tal que

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0,T; L^2(\Omega)) \tag{4.2.51}$$
$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.2.52}$$

com a igualdade (4.2.52) no sentido das distribuições em $(0,T)$*. Além disso,*

$$u(0) = u_0. \tag{4.2.53}$$

<u>Demonstração</u>: Primeiramente, recordamos que se $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então tem-se as aplicações

$$t \longrightarrow (u(t),v) \in L^2(0,T) \quad t \longrightarrow a(u(t),v) \in L^2(0,T).$$

Além disso, sendo $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)$ obtém-se

$$t \longrightarrow (f(t),v) \in L^2(0,T).$$

Desse modo, resulta que as derivadas em (4.2.52) fazem sentido em $\mathcal{D}'(0,T)$.

É possível mostrar (ver [14], por exemplo) que existe uma sucessão de valores próprios de Δ , $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_\nu \le \cdots$, com

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} \lambda_\nu = \infty,$$

e uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$ composta por funções próprias (w_ν), sendo $w_\nu \in H_0^1(\Omega)$, satisfazendo a condição

$$a(w_\nu, v) = \lambda_\nu(w_\nu, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

O método de demonstração aqui empregado (utilizado anteriormente neste texto) consiste em aproximar a solução que deseja-se encontrar por soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita. A dificuldade reside em provar que esta sucessão de soluções obtidas em dimensão finita, converge para a solução do problema. Este método foi utilizado originalmente por Faedo e Galerkin [15].

Problema Aproximado: Seja $V_m = \text{span}[w_1, w_2, \cdots, w_m]$ o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores próprios. Procura-se $u_m : [0,T] \longrightarrow V_m$ solução do sistema

$$\frac{d}{dt}(u_m(t),v) + a(u_m(t),v) = (f(t),v), \quad \forall v \in V_m, \tag{4.2.54}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \tag{4.2.55}$$

no qual $u_{0m} = \sum_{\nu=1}^{m}(u_0, w_\nu)w_\nu$ e $u_m(t) \in V_m$, com $u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m}(u_m(t), w_\nu)w_\nu$. Fazendo-se em (4.2.54), $v = w_\nu$, $1 \le \nu \le m$, resulta que as funções $t \longrightarrow (u_m(t), w_\nu)$ são determinadas por

$$\frac{d}{dt}(u_m(t),w_\nu) + \lambda_\nu(u_m(t),w_\nu) = (f(t),w_\nu), \quad 1 \le \nu \le m, \tag{4.2.56}$$

$$(u_m(0),w_\nu) = (u_0,w_\nu). \tag{4.2.57}$$

A solução de (4.2.56)-(4.2.57) é

$$(u_m(t),w_\nu) = (u_0,w_\nu)\exp^{-\lambda_\nu t} + \int_0^t \exp^{-\lambda_\nu(t-s)}(f(t),w_\nu)ds.$$

Portanto, tem-se a solução aproximada do problema como sendo

$$u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \big[(u_0, w_\nu) \exp^{-\lambda_\nu t} + \int_0^t \exp^{-\lambda_\nu (t-s)} (f(t), w_\nu) ds\big] w_\nu.$$

Resta demonstrar que a sucessão $(u_m(t))$ das soluções aproximadas converge em $C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)$ e que o limite é a solução de (4.2.52) e (4.2.53).

Convergência em $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$: É suficiente provar que $(u_m(t))$ é uma sequência convergente em $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. De fato, suponha-se que $n < m$. Sendo (w_ν) ortonormal em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Pitágoras tem-se

$$\begin{aligned} &|u_m(t) - u_n(t)|_{L^2(\Omega)} \\ &= \Big(\sum_{\nu=n+1}^{m} \big[(u_0, w_\nu) \exp^{-\lambda_\nu t} + \int_0^t \exp^{-\lambda_\nu (t-s)} (f(t), w_\nu) ds\big]^2 \Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowsky em (4.2.58)

$$\begin{aligned} |u_m(t) - u_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leq \Big(&\sum_{\nu=n+1}^{m} (u_0, w_\nu)^2 \exp^{-2\lambda_\nu t} \Big)^{1/2} + \\ &\Big(\sum_{\nu=n+1}^{m} \Big(\int_0^t \exp^{-\lambda_\nu (t-s)} (f(t), w_\nu) ds \Big)^2 \Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

e a desigualde de Cauchy-Schwarz no segundo termo do lado direito de (4.2.59), vem que

$$\int_0^t (\exp^{-\lambda_\nu (t-s)} (f(t), w_\nu) ds)^2 \leq \int_0^t (f(t), w_\nu)^2 ds \int_0^t \exp^{-2\lambda_\nu (t-s)} ds$$

Sendo $\lambda_\nu \geq \lambda_1$, para todo v, obtém-se

$$\int_0^t \exp^{-2\lambda_\nu (t-s)} ds < \frac{1}{2\lambda_1}.$$

Portanto, coletando os resultados obtidos tem-se

$$\begin{aligned} &|u_m(t) - u_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\Big(\sum_{\nu=n+1}^{m} (u_0, w_\nu)^2 \exp^{-2\lambda_\nu t} \Big)^{1/2} + \Big(\frac{1}{2\lambda_1} \sum_{\nu=n+1}^{m} \int_0^T (f(t), w_\nu)^2 ds \Big). \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Note que $u_0(x) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_0, w_\nu) w_\nu$, e aplicando a identidade de Parseval conclui-se que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} = \sum_{\nu=n+1}^{m} (u_0, w_\nu)^2 = 0.$$

Analogamente, sendo

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f(s), w_\nu) w_\nu$$

conclui-se que a segunda parcela da desigualdade (4.2.60) também converge para zero quando n, m tendem para o infinito. Logo,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \max_{0\leq t\leq T} |u_m(t) - u_n(t)|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

provando que $(u_m(t))$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e, portanto, convergente para uma função u deste espaço.

Convergência em $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (v, w_\nu)^2$. Logo,

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{\nu=n+1}^{m} \lambda_\nu (u_m(t) - u_n(t), w_\nu)^2 =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{m} \lambda_\nu \big[(u_0, w_\nu) \exp^{-\lambda_\nu t} + \int_0^t \exp^{-\lambda_\nu (t-s)} (f(s), w_\nu) ds\big]^2.$$

donde, pela desigualdade elementar de números reais, $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, resulta

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{\nu=n+1}^{m} 2\lambda_\nu (u_0, w_\nu)^2 \exp^{-2\lambda_\nu t} +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{m} 2\lambda_\nu \big[\int_0^t \exp^{-2\lambda_\nu (t-s)} (f(s), w_\nu) ds\big]^2. \tag{4.2.61}$$

Por meio de cálculos simples e aplicando-se o mesmo raciocínio utilizado na convergência anterior, conclui-se que

$$\int_0^T \|u_m(t) - u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{\nu=n+1}^{m} (u_0, w_\nu)^2 + T \sum_{\nu=n+1}^{m} \int_0^T (f(t), w_\nu)^2 dt.$$

Daí resulta que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_0^T \|u_m(t) - u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Logo, (u_m) é uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, convergindo para u^* neste espaço. Sendo $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ continuamente imersos em $L^2(0,T; L^2(\Omega))$ [15], conclui-se, do que acabou-se de provar, que $u = u^*$. Desse modo, resulta que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} u_m = u \quad \text{em} \quad C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Para verificar que $u(0) = u_0$, basta observar que $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u(0)$ em $L^2(\Omega)$ e

$$u_{0m} = \sum_{\nu=1}^{m} (u_0, w_\nu) w_\nu \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Demonstra-se a seguir que u é solução da equação (4.2.52). Seja $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ fixo. Portanto, para todo $m > m_0$, de (4.2.54) tem-se

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), v) + a(u_m(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m, \tag{4.2.62}$$

para todo $v \in V_{m_0} \subset V_m$, sendo $u_m(t) \in V_m$. Note que as funções $t \longrightarrow (u_m(t), v)$ e $t \longrightarrow a(u_m(t), v)$ pertencem a $L^2(0,T)$, logo definem distribuições sobre $(0,T)$. Multiplique-se (4.2.62) por $\theta(t)$ e aplique-se a definição de derivada no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$ para obter-se

$$-\int_0^T (u_m(t), v)\frac{d\theta}{dt}dt + \int_0^T a(u_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt. \tag{4.2.63}$$

Das convergências fortes em $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ obtém-se, tomando $m \longrightarrow \infty$ em (4.2.63) e com $v \in V_{m_0}, m_0 < m, fixo,$

$$-\int_0^T (u(t), v)\frac{d\theta}{dt}dt + \int_0^T a(u(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt.$$

Novamente, usando a definição de derivada no sentido das distribuições, obtém-se

$$\left(\frac{d}{dt}(u, v), \theta(t)\right) + \int_0^T a(u(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t)v)\theta(t)dt.$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e toda $v \in V_{m_0}$. Portanto, fica verificada a equação (4.2.52), porque m_0 é arbitrário e a sucessão (w_ν) é densa em $H_0^1(\Omega)$.

Note que em virtude de $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, resulta que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, para quase todo $t > 0$. Logo o (função) traço de $u(t)$ em Γ é zero , ou seja, prova-se que a solução é nula na fronteira lateral de Q (equação (4.2.50)).

Unicidade: É simples provar a unicidade, porque $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. De fato, sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema parabólico nas condições do teorema, conclui-se que $w = u_1 - u_2$ é solução de

$$\frac{dw}{dt} - \Delta w = 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)). \quad w(0) = 0. \tag{4.2.64}$$

Logo, multiplicando (4.2.64) por $w(t)$ tem-se

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2_{L^2(\Omega)} + a(w(t), w(t)) = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Sendo $w(0) = 0$, resulta que $|w(t)|_{L^2(\Omega)} = 0$ em $[0,T]$, provando que $u_1 = u_2$. ■

4.3 Exercícios

1. Mostre que

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

é um produto escalar em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ considere-se a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Demonstre que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = a(u,u)^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$.

2. Represente-se por V_m o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, ..., w_m$ e define-se $u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} (u_m(t), w_\nu) w_\nu \in V_m$. Mostre que a sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Apêndice A

Conceito de Solução Fraca de uma EDP

O objetivo aqui é obter a formulação matemática do conceito de *solução fraca para uma equação diferencial parcial.* Como motivação toma-se a equação diferencial parcial que modela o problema unidimensional de deformações verticais de uma corda elástica, conforme L.A. Medeiros, M. Milla Miranda e A.T. Louredo [1].

Considera-se uma corda elástica $[0, L]$ em repouso, estendida sobre o eixo $0x$ de um sistema de coordenadas Cartesianas $x0u$, presa nos extremos $x = 0$ e $x = L$, submetida a uma tensão τ. Represente por S a deformação de $0L$ no instante $t > 0$. As deformações são *pequenas* e perpendiculares ao eixo $0x$, no plano $x0u$. Supõe-se, em cada instante $t > 0$, a deformação ou vibração S denotada pela função real

$$u(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

duas vezes continuamente diferenciável no domínio $[0, L]\times[0, T]$, cujos pontos são representados por (x, t). A deformação média do ponto (x, t) é denotada por $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x, t)$ ou $u_x(x, t)$. Supõe-se que estas deformações são pequenas, isto é,

$$|u_x(x,t)| \ll 1. \tag{A.0.1}$$

Como os extremos estão presos tem-se que $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para todo t. Se dx for um segmento de $[0, L]$, representa-se por ds em S *o transformado* de dx pela tensão τ. Portanto, pequenas deformações equivale a supor $dx \approx ds$. Observa-se que a tensão contante τ é uma força atuando em cada ponto de $[0, L]$. Consequentemente, a energia potencial de dx em ds, no instante t, é dada por

$$dV(t) = \tau(ds - dx). \tag{A.0.2}$$

Este é o trabalho de τ ao deformar dx em ds. Com a hipótese de pequenas deformações, (A.0.1), a equação (A.0.2) será agora re-escrita de modo mais conveniente.

Sabe-se que

$$ds = \sqrt{1 + \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2}dx \approx \big[1 + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2\big]dx,$$

[1] *Modelo Matemático para Vibrações de Cordas Elásticas* dedicado ao Prof. Plínio Sussekind Rocha (em memória), não publicado

onde desenvolveu-se a raiz quadrada em série binomial e considerou-se apenas os dois primeiros termos. Portanto, tem-se que

$$ds - dx = \Big[1 + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2\Big]dx - dx = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2.$$

Substituindo esta expressão na equação (A.0.2) encontra-se que

$$dV(t) = \frac{\tau}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2.$$

Conclui-se que a energia potencial de deformação de $[0, L]$ em S, pela tensão τ, no instante $t > 0$, é

$$V(t) = \frac{\tau}{2}\int_0^L \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2. \tag{A.0.3}$$

A seguir, calcula-se a energia cinética na transformação de $[0, L]$ em S, por meio da tensão τ. De fato, represente-se por $\rho(x)$ a densidade do material da corda elástica $[0, L]$, isto é, a massa por unidade de comprimento. Supõe-se $\rho(x)$ uma função numérica regular. A massa de dx é $\rho(x)dx$. A velocidade de deformação é $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)$. Logo, a energia cinética no instante t na deformação de dx em ds fica dada por

$$dU(t) = \frac{1}{2}(\rho(x)dx)\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 = \frac{1}{2}\rho(x)\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 dx.$$

A energia cinética na configuração S, no instante t, segue como sendo

$$U(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 dx.$$

Finalmente, sejam dois instantes de tempo $t_1 < t_2$, a integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [U(t) - V(t)]dt, \tag{A.0.4}$$

denomina-se *ação do sistema constituído por pequenas deformações de uma corda elástica no intervalo de tempo* $t_1 < t_2$, que pode ser re-escrita a partir das definições anterior via a seguinte expressão

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big(\rho(x)\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 - \tau\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2\Big)dxdt. \tag{A.0.5}$$

Buscando a fomulação matemática do conceito de solução fraca do problema de pequenas deformações verticais de uma corda elástica $[0, L]$, considera-se o funcional (A.0.5) representado explicitamente em $[0, L] \times [0, T]$. Desse modo, tem-se

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big(\rho(x)\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 - \tau\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2\Big)dxdt. \tag{A.0.6}$$

Sejam $Q = (0, L) \times (0, T)$ e $u(x, t) \in \mathbb{R}$ tal que $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$. Denota-se por $\mathcal{H}(Q)$ o espaço vetorial real das funções reais contínuas, $u(x, t)$ definidas em Q, deriváveis em Q e nulas em $x = 0$ e $x = L$, para todo $0 < t < T$, com o quadrado da função e de suas derivadas (em x e t) integráveis em Q. Escreve-se o funcional (A.0.6) sob a forma

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_Q (\rho u_t^2 - \tau u_x^2)dxdt, \quad \forall u \in \mathcal{H}(Q), \tag{A.0.7}$$

denominado *funcional energia* ou *ação do sistema*. O espaço vetorial $\mathcal{H}(Q)$ é chamado de *espaço de energias*. Aqui aplica-se o *Princípio Variacional de Hamilton*[2]. O Princípio de Hamilton afirma que as funções de $\mathcal{H}(Q)$ representando pequenas deformações verticais de uma corda elástica $[0, L]$, presa nos extremos, são as que tornam o funcional $J(u)$ (A.0.7) estacionário, ou, tornam mínimo o funcional. Por esta razão o Princípio de Hamilton é conhecido como *Princípio da Ação Mínima* (Capítulo VI de [20]).

Do ponto de vista da Análise Matemática deve-se procurar as funções $u \in \mathcal{H}(Q)$ anulando a derivada de Gateaux do funcional de energia $J(u)$, definido por (A.0.7), isto é, os vetores de $\mathcal{H}(Q)$ tais que:

$$\lim_{\lambda \longmapsto 0} \frac{1}{\lambda}[J(u+v) - J(u)] = 0,$$

para todo $v \in \mathcal{H}(Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por um cálculo simples obtém-se

$$J(u + \lambda v) - J(u) = \lambda \int_Q (\rho u_t v_t - \tau u_x v_x) dxdt + \frac{\lambda^2}{2} \int_Q (\rho v_t^2 - \tau v_x^2) dxdt.$$

Dividindo por $\lambda > 0$ e tomando o limite quando $\lambda \longmapsto 0$, da expressão acima tem-se

$$J'(u) \cdot v = \int_Q (\rho u_t v_t - \tau u_x v_x) dxdt,$$

que é a derivada de $J(u)$ na direção de v (Derivada de Gateaux de $J(u)$). As funções u que tornam $J(u)$ mínimo (ou estacionário) são as $u \in \mathcal{H}(Q)$ tais que

$$\int_Q (\rho u_t v_t - \tau u_x v_x) dxdt = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}(Q). \tag{A.0.8}$$

Conclui-se do Princípio de Hamilton que as funções $u \in \mathcal{H}(Q)$ representando as deformações verticais de uma corda elástica $[0, L]$, presa nos extremos, são aquelas que anulam a derivada de Gateaux de $J(u)$, isto é, que satisfazem a equação (A.0.8). A seguir será feita uma análise da equação (A.0.8).

Representa-se por $C_0^\infty(Q)$ o espaço vetorial das funções infinitamente, continuamente, diferenciáveis em Q com suporte contido em Q. Tem-se $C_0^\infty(Q) \subset \mathcal{H}(Q)$. Portanto, é possível escolher $v = \varphi \in C_0^\infty(Q)$ em (A.0.8) e integrando-se por parte, chega-se em

$$\int_Q (\rho u_{tt} - \tau u_{xx}) \varphi dxdt = 0 \tag{A.0.9}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Resulta do Lema de Lagrange (1736-1813), ou do Lema Fundamental do Cáculo das Variações ou ainda do Lema de Du Bois Raymond 2.2, que u é solução da equação

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0, \tag{A.0.10}$$

pontualmente em Q. O modelo (A.0.10) foi pela primeira vez estudado por d'Alembert (1717-1783), via aplicação de outra metodologia. Esta foi a primeira equação diferencial parcial representando um fenômeno da Física Matemática.

Observando a integral em (A.0.9) e a igualdade pontual em (A.0.10) deduz-se duas maneiras de formular matematicamente o fenômeno de pequenas vibrações de uma corda elástica $[0, L]$, presa nos extremos, submetida a uma tensão constante

[2]Sir Willian Rowin Hamilton (1805-1865), segundo historiadores, foi um matemático do século XIX não se associando às correntes matemáticas da época

τ. Do que se conclui que há dois modelos matemáticos e, portanto, duas soluções, para formular o problema físico - uma global dada por (A.0.9) e outra pontual dada por (A.0.10). De fato, para simplificar a notação suponha $\rho = \tau = 1$. Podemos formular os seguintes dois problemas

$$\text{Encontrar} \quad u \in \mathcal{H}(Q) \quad \text{tal que}$$

$$\int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdt = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}(Q), \tag{A.0.11}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad [0,L], \quad t > 0. \tag{A.0.12}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pontualmente} \quad \text{em} \quad Q$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{A.0.13}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad [0,L], \quad t > 0. \tag{A.0.14}$$

Os modelos (A.0.11) e (A.0.13) são denominados *problemas mistos* para o operador $\dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$, porque ambos envolvem uma condição de contorno e uma condição inicial.

Na formulação (A.0.13) a igualdade é no sentido pontual, exigindo mais regularidade da função $u(x,t)$; por outro lado, em (A.0.11) a solução é dada por meio de uma integral, exigindo menos da função $u(x,t)$. O modelo (A.0.13), idealizado por D'Alembert na segunda metade do século $XVIII$, quando haviam poucos recursos matemáticos, expressa bastante bem a física do problema se comparando à formulação (A.0.11), mais avançada, da primeira metade do século XIX.

Com o progresso da Análise Matemática na segunda metade do século XX, principalmente com a criação da noção de derivada fraca por S. Sobolev (1908-1989), foi possível formular $(A.0.11)_1$ de modo *inteligível* definindo-se um novo espaço de funções para substituir $\mathcal{H}(Q)$, que é muito vago. Com objetivo de introduzir a noção de *solução fraca do modelo de Hamilton* (A.0.11) apresentamos conceitos matemáticos associados à derivada fraca para definir o espaço de Hilbert onde vivem as funções da formulação (A.0.11). A integral empregada é a de Henri Lebesgue (início do século XX). Desse modo, representa-se por $L^2(0,L)$ o espaço de Hilbert das funções reais u com quadrado integrável a Lebesque em $(0,L)$, cujos produto escalar e sua norma induzida são dados por

$$(u,v) = \int_0^L u(x)v(x)dx, \quad \text{e} \quad |u|^2_{L^2(0,L)} = \int_0^L u(x)^2 dx.$$

Define-se o espaço $H^1(0,L)$ como sendo o espaço vetorial

$$H^1(0,L) = \{u \in L^2(0,L);\ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0,L)\}.$$

com o produto escalar

$$((u,v)) = \int_0^L u(x)v(x)dx + \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

e norma

$$\|u\|^2 = \int_0^L u^2(x)dx + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

O espaço $H^1(0,L)$ com o produto escalar definido é um espaço de Hilbert, denominado *Espaço de Sobolev de ordem um sobre* $(0,L)$. Demonstra-se que se $u \in H^1(0,L)$ tem-se $u \in \mathcal{C}[0,L]$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$ e $u(L)$. Por esta razão, define-se $H_0^1(0,L)$ como sendo constituido das funções $u \in H^1(0,L)$ tais que $u(0) = u(L) = 0$.

Retorna-se agora à equação (A.0.11) para obtermos a noção de *solução fraca* pelo Princípio de Hamilton . De fato, considere-se a função $\theta(t)v(x)$ com $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$ e $v \in H^1(0,L)$, pertencente a $\mathcal{H}(Q)$. Portanto, tem-se de (A.0.11)

$$\int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\theta' v dx dt - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\theta \frac{\partial v}{\partial x} dx dt = 0$$

ou

$$\int_0^T (\frac{\partial u}{\partial t}, v)\theta'(t)dt - \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)dt = 0. \tag{A.0.15}$$

Aplicando a definição de derivada fraca na primeira integral de (A.0.15), obtém-se

$$\int_0^T \big[\frac{d}{dt}\big(\frac{\partial u}{\partial x}, v\big) + ((u(t), v))\big]\theta(t)dt = 0, \tag{A.0.16}$$

para toda $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$, $v \in H^1(0,L)$. Portanto, motivado por (A.0.11) define-se *solução fraca* da equação de d'Alembert a função $u(x,t)$, $0 < x < L$, $t > 0$ tal que

$$u \in C^0(0,T; H_0^1(0,T; H_0^1(0,L)) \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt} \in C^0(0,T; H_0^1(0,T; L^2(0,L))$$

satisfazendo a equação (A.0.16) para toda $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$.

A.1 Exercícios

1. Calcule a derivada de Gateaux do funcional abaixo, definido em (A.0.7)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_Q (\rho u_t^2 - \tau u_x^2) dx dt, \quad \forall u \in \mathcal{H}(Q), \tag{A.1.17}$$

   e mostre que o mínimo de $J(\cdot)$ é atingido quando tem-se $u \in \mathcal{H}(Q)$ (o espaço vetorial real das funções reais contínuas, $u(x,t)$ definidas em Q, deriváveis em Q e nulas em $x = 0$ e $x = L$, para todo $0 < t < T$, com o quadrado da função e de suas derivadas (em x e t) integráveis em Q.) tal que

$$\int_Q (\rho u_t v_t - \tau u_x v_x) dx dt = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}(Q). \tag{A.1.18}$$

2. Define-se o espaço $H^1(0,L)$ como sendo o espaço vetorial

$$H^1(0,L) = \{u \in L^2(0,L);\ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0,L)\}.$$

   com o produto escalar

$$((u,v)) = \int_0^L u(x)v(x)dx + \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

   e norma

$$\|u\|^2 = \int_0^L u^2(x)dx + \int_0^L (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx.$$

   O espaço $H^1(0,L)$ com o produto escalar definido é um espaço de Hilbert, denominado *Espaço de Sobolev de ordem um sobre* $(0,L)$. Demonstre que se $u \in H^1(0,L)$ tem-se $u \in \mathcal{C}[0,L]$.

Apêndice B

O Teorema de Hahn-Banach

A demonstração do Teorema de Hahn-Banach apresentada aqui foi introduzida nas aulas do Curso de Análise, na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (atual UFRJ), em 1958, ministradas pelo Prof. Leopoldo Nachbin (ver [3, 16] e as bibliografias mencionadas).

Teorema B.1 (Hahn-Banach)**.** *Seja E um um espaço vetorial real, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v), \qquad p(\lambda u) = \lambda p(u), \quad \lambda \geq 0,$$

e M um subespaço de E. Se $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma forma linear tal que

$$f(u) \leq p(u), \qquad \forall \quad u \in M,$$

então, existe uma forma linear $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u) \leq p(u)$ em E e a restrição $\varphi|_M$ de φ a M é igual a f ($\varphi|_M = f$).

Demonstração: Sejam $m^{'}, m^{''} \in M$, segue-se que $m^{'} - m^{''} \in M$ e das hipóteses do teorema

$$f(m^{'}) - f(m^{''}) = f(m^{'} - m^{''}) \leq p(m^{'} - m^{''}). \tag{B.0.1}$$

Seja u_0 um vetor de $E - M$, então resulta que

$$p(m^{'} - m^{''}) \leq p(m^{'} + u_0) + p(-m^{''} - u_0).$$

Portanto, de (B.0.1) obtém-se

$$-f(m^{''}) - p(-m^{''} - u_0) \leq -f(m^{''}) + p(m^{'} + u_0). \tag{B.0.2}$$

Desse modo, quando u varia em M e u_0 é um vetor de E, tem-se os seguintes dois conjuntos de números reais

$$\{-f(u) - p(-u - u_0)\} \quad \text{e} \quad \{-f(u) + p(u + u_0)\}.$$

A desigualdade (B.0.2) nos diz que qualquer número do primeiro conjunto é sempre não maior do que qualquer número do segundo. Resulta, portanto, que o primeiro conjunto possui um supremo a e o segundo um ínfimo b, sendo $a \leq b$. Consequentemente, tomando $a \leq \alpha \leq b$, obtém-se para todo $m \in M$ que

$$-f(m) - p(-m - u_0) \leq \alpha \leq -f(m) + p(m + u_0). \tag{B.0.3}$$

Considerando-se agora o subespaço $M + [u_0]$, gerado por M e u_0, isto é,

$$M + [u_0] = \{m + \lambda u_0 \,|; \lambda \in \mathbb{R}, m \in M\}.$$

definimos $\varphi : M + [u_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u) = f(m) + \lambda\alpha$, para todo $u = m + \lambda u_0$. Esta função φ goza das seguintes propriedades

a) Fixado α em $[a, b]$, φ fica bem definida, porque cada vetor de $M + [u_0]$ escreve-se unívocamente sob a forma $m + \lambda u_0$;

b) φ é linear;

c) A restrição de φ a M $(\varphi|_M)$ é igual a f;

d) $\varphi(u) \leq p(u)$ para todo $u \in M + [u_0]$.

Para demonstrarmos o item d), tomemos $\lambda \neq 0$ e na desigualdade (B.0.3) substituímos m por m/λ. Logo,

$$-f(m/\lambda) - p(-\frac{m}{\lambda} - u_0) \leq \alpha \leq -f(m/\lambda) + p(\frac{m}{\lambda} + u_0).$$

Daí, se $\lambda > 0$, obtém-se

$$\lambda\alpha \leq -f(m) + p(m + \lambda u_0)$$

e se $\lambda < 0$,

$$-\lambda f(m/\lambda) - \lambda p(-\frac{m}{\lambda} - u_0) \geq \lambda\alpha,$$

isto é,

$$-f(m) + p(m + \lambda u_0) \geq \lambda\alpha.$$

De ambas as desigualdades, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$f(m) + \lambda\alpha \leq p(m + \lambda u_0),$$

isto é, $\varphi(u) \leq p(u)$ para todo $u \in M + [u_0]$.

Consequentemente, obtivemos a forma linear φ que prolonga a f no subespaço $M + [u_0]$, nas condições do teorema. A demonstração para o espaço inteiro E, é feita usando o lema de Zorn[1][2], como segue.

Representemos por S o conjunto das formas lineares φ, cada uma definida em um subespaço $L_\varphi \subset E$, tal que $L_\varphi \supset M$ e a restrição de φ a M $(\varphi|_M)$ é igual a f. Pelo que acabamos de demonstrar, S é não vazio. Ordenemos S do seguinte modo: diz-se que $\varphi \leq \Psi$, quando $L_\varphi \subseteq L_\Psi$ e Ψ for uma extensão de φ. Vejamos que S é indutivo superiormente, isto é, toda cadeia de S possui um supremo. De fato, seja $\Gamma = \{\varphi_\lambda\}$ uma cadeia de S, sendo φ_λ definida em L_{φ_λ}. Fazendo $L = \bigcup L_{\varphi_\lambda}$, segue-se que L é um subespaço vetorial, porque é a união de uma cadeia de subespaços.

Seja φ definida em L de modo a estender a cada uma das φ_λ. Segue-se que $\varphi \geq \varphi_\lambda$ para cada λ, pois $L_{\varphi_\lambda} \subset L$ para cada λ e $\varphi = \varphi_\lambda$ em L_{φ_λ}, sendo φ definida em L. Aplicando o lema de Zorn, conclui-se que S possui um elemento máximo, o qual pode ser estendido e que é definido em E. ∎

[1]Se, em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado, todo subconjunto totalmente ordenado tem uma quota superior, então o conjunto tem um elemento maximal

Lema B.1. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma linear contínua. Então, existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, linear e contínua tal que $f(u) = g(u) - i(iu)$.*

Demonstração: De fato, como $f(u)$ um número complexo tem=se $f(u) = g(u) - ih(u)$, sendo g, h funções reais sobre E. Sendo $f(iu) = if(u)$, tem-se que $g(iu) + ih(iu) = ig(u) - h(u)$ e, pela igualdade de números complexos, $h(u) = g(iu)$; consequentemente, $f(u) = g(u) - ig(iu)$. ■

Corolário B.1. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, M um subespaço vetorial normado de E, e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ uma forma linear contínua. Então, existe uma $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, linear e contínua tal que $\varphi|_M = f$ e $\|\varphi\| = \|f\|$.*

Demonstração: Caso Real - Consideremos a função $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(u) = \|f\| \cdot \|u\|$. Verifica-se que p satisfaz as condições do teorema de Hahn-Banach (B.1) e além disto,

$$f(u) \leq |f(u)| \leq \|f\| \cdot \|u\| = p(u), \qquad \forall \quad u \in M,$$

pois $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Aplicando o teorema (B.1), existe uma forma linear $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_M = f$, $\varphi(u) \leq p(u)$, para todo $u \in E$. Resta provar que φ é contínua. Tem-se

$$\varphi(u) \leq p(u) \leq \|f\| \cdot \|u\| \quad \text{e} \quad -\varphi(u) = \varphi(-u) \leq p(-u) \leq \|f\| \cdot \|u\|,$$

do que resulta $|\varphi(u)| \leq \|f\| \cdot \|u\|$, isto é φ é contínua e $\|\varphi\| \leq \|f\|$. Se $u \in M$, então

$$|f(u)| = |\varphi(u)| \leq \|\varphi\|\|u\|,$$

e, portanto, concluímos que $\|\varphi\| = \|f\|$.

Caso Complexo - Pelo Lema (B.1) , sendo $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ linear e contínua, tem-se $f(u) = g(u) - ig(iu)$ com $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e contínua. Logo, pelo caso real, g admite uma extensão linear contínua $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\|\varphi\| = \|g\|$. A $\Psi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Psi(u) = \varphi(u) - i\varphi(iu)$, é uma extensão linear contínua de f ao espaço E. Provaremos que $\|\Psi\| = \|f\|$. De fato, seja $u \in E$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, tal que $e^{i\vartheta}\Psi(u)$ seja um número real negativo, então,

$$|\Psi(u)| = e^{i\vartheta}\Psi(u) = |\Psi(e^{i\vartheta}u)| = |\varphi(e^{i\vartheta}u)| \leq \|\varphi\|\|u\|$$

porque $e^{i\vartheta}Psi(u)$ sendo real, reduz-se a sua parte real. Sendo $\|\varphi\| = \|g\| \leq \|f\|$, resulta que $\|\Psi\| \leq \|f\|$.

Para provar a desigualdade no sentido contrário, observe que, sendo $|\Psi(u)| \leq \|\Psi\|\|u\|$ e Ψ uma extensão de f, para todo u em M, $|f(u)| \leq \|\Psi\|\|u\|$, isto é, $\|f\| \leq \|\Psi\|$, o que demonstra o Corolário (B.1). ■

Corolário B.2. *Seja E um espaço vetorial normado e $u_0 \neq 0$ um vetor de E. Então existe uma forma linear contínua $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\varphi(u_0) = \|u_0\|$ e $\|\varphi\| = 1$.*

Demonstração: Representemos por $[u_0]$ o espaço gerado por u_0. A forma linear $f : [u_0] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(\lambda u_0) = \lambda\|u_0\|$$

é contínua, possui $\|f\| = 1$ e $f(u_0) = \|u_0\|$. Aplicando o Corolário (B.1), do teorema de Hahn-Banach (B.1), obtém-se o Corolário (B.2). ■

Corolário B.3. *Seja M um subespaço fechado do espaço vetorial normado E, u_0 um vetor de E não pertencente a M e d a distância de u_0 a M. Então existe uma forma linear limitada $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\varphi(u_0) = d$, $\varphi(u) = 0$ em M e $\|\varphi\| = 1$.*

Demonstração: Consideremos o subespaço $[u_0] + M$ gerado por u_0 e M. Sendo M fechado, segue-se que $d > 0$, sendo

$$d = \inf_{u \in M} \|u_0 - u\|.$$

Os elementos de $[u_0] + M$ pode ser representados, também, por $\lambda u_o - u$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in M$. A função $f : [u_0] + M \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(\lambda u_0 - u) = \lambda d$, é uma forma linear contínua. Para verificar que f é contínua calculamos

$$|f(\lambda u_o - u)| = |\lambda| d = |\lambda| \inf_{u \in M} \|u_0 - u\| = d = \inf_{u \in M} \|\lambda u_0 - u\| \leq \|\lambda u_0 - u\|.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{u \in M} \frac{|f(\lambda u_o - u)|}{\|\lambda u_0 - u\|} = \sup_{u \in M} \frac{|\lambda d|}{\|\lambda u_0 - u\|} = \sup_{u \in M} \frac{d}{\|u_0 - u\|} \\ &= d / \inf_{u \in M} \|\lambda u_0 - u\| = 1. \end{aligned}$$

Além disso, observa-se também que $f(u) = 0$ em M. ■

É importante notar que o Corolário (B.3) nos dá a existência de formas lineares contínuas sobre um espaço vetorial normado.

Apêndice C

Análise Numérica da Equação do Calor

Este capítulo baseia-se no texto *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems* de Vidar Thomée [21] e também nas notas de aula do curso de *Análise Numérica de Elementos Finitos (GB-080)* da Pós-Graduação em Modelagem Computacional do LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica), ministrado no período de 2008-2011 por Sandra Malta e Abimael Loula.

C.1 O Problema Estacionário

Antes de iniciarmos o estudo da equação do Calor (problema parabólico transiente) vamos apresentar a análise numérica de uma equação bastante usada em muitas aplicações de interesse (dinâmica de populações, turbulência e transporte em geral), conhecida como a equação de convecção-difusão-reação , no caso estacionário (não depende do tempo).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$, o problema de convecção-difusão-reação é então definido como:

$$\begin{aligned} &-\epsilon\Delta u + \underline{\beta}\cdot\nabla u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ &div\ \underline{\beta} = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ &u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

com $\underline{\beta} \in (L^\infty(\Omega))^2 = L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$ funções conhecidas.

A formulação variacional (ou formulação fraca) do problema (C.1.1) é dada por:

$$\begin{aligned} &\text{Achar} \quad u \in V = H_0^1(\Omega), \quad \text{tal que} \\ &A_\epsilon(u,v) = F(v), \quad \text{para todo} \quad v \in V, \end{aligned} \tag{C.1.2}$$

onde

$$\begin{aligned} A_\epsilon(u,v) &= \epsilon(\nabla u,\nabla v) + (\underline{\beta}\cdot\nabla u, v) + (u,v) \\ F(v) &= (f,v), \end{aligned}$$

e $(u,u) = \int_\Omega u^2dx$ denota o produtor escalar em $L^2(\Omega)$.

A seguir, demonstraremos a coercividade e a continuidade da forma bilinear $A_\epsilon(\cdot,\cdot) : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$. A partir destas propriedades, via a aplição do Teorema de

Lax-Milgram , demonstraremos uniciadade e existência de solução para problema (C.1.2).
• Continuidade: Da definição de $A_\epsilon(\cdot,\cdot)$ e desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtem-se

$$|A_\epsilon(u,v)| \leq \epsilon|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)} + |\underline{\beta}|_\infty|\nabla u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)},$$

onde $|\underline{\beta}|_\infty$ é a norma em L^∞, $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ a norma em $L^2(\Omega)$ e $|\cdot|$ o módulo em $\mathbb{R}^n$. Somando termos convenientes do lado direito da última desigualdade segue que

$$|A_\epsilon(u,v)| \leq C|||u|||_\epsilon|||v|||_\epsilon,$$

onde

$$|||u|||_\epsilon^2 = \epsilon|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{C.1.3}$$

e $C > 0$ é uma constante positiva tal que $C = C(\epsilon, |\underline{\beta}|_\infty)$.
• Coercividade (ou Elipticidade): Antes de demontrarmos a coercividade de $A_\epsilon(\cdot,\cdot)$ chamamos atenção que por integração por partes, tem-se

$$(v, \underline{\beta}\cdot\nabla v) = \int_\Omega v\underline{\beta}\cdot\nabla v dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \underline{\beta}\cdot\eta v^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega div\ \underline{\beta}v^2\, dx.$$

Logo, já que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $div\ \underline{\beta} = 0$ então

$$(v, \underline{\beta}\cdot\nabla v) = 0$$

Deste modo, segue que

$$A_\epsilon(v,v) = \epsilon|\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Omega)} = |||v|||^2_\epsilon, \tag{C.1.4}$$

demonstrando assim a coercividade da forma bilinear $A_\epsilon(\cdot,\cdot)$.

C.1.1 O Problema Aproximado

Antes de apresentarmos o problema aproximado associado a (C.1.2), via o Método de Elementos Finitos [9] , serão introduzidas algumas notações e definições complementares.

Definição C.1. *Uma partição (ou malha) de Ω em elementos K, e denotada por $\mathcal{T}_h$, é chamada de conforme se*

$$\overline{\Omega} = \cup_{K\in\mathcal{T}_h} K$$

e tal que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, um nó, ou uma aresta, onde $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$.

Seja $h_K = diam(K)$=maior lado de K e $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. Desse modo, definimos o espaço de dimensão finita das funções de elementos finitos

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) :\ v_h|_K \in P_k(K) \text{ e } v_h|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{C.1.5}$$

onde $P_k(K)$, $k \geq 1$, é o espaço dos polinômios por partes de ordem $k \geq 1$ em K. Da definição de V_k^k é imediato que $V_h^k \subset V = H_0^1(\Omega)$.

O Método de Galerkin

Logo, a aproximação do problema (C.1.2) através do *método de Galerkin* [6, 9, 21] é dada por

$$\begin{aligned} &\text{Achar} \quad u_h \in V_h^k, \quad \text{tal que} \\ &A_\epsilon(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v_h \in V_h^k. \end{aligned} \tag{C.1.6}$$

Como $V_h^k \subset V$ os resultados de continuidade e coercividade, apresentados para a forma $A_\epsilon(\cdot,\cdot)$, são imediatamente transferidos para o problema discreto (C.1.6) garantindo assim a existência e unicidade de uma solução discreta $u_h \in V_h^k$.

Da continuidade de $A_\epsilon(\cdot,\cdot)$, calcula-se

$$\epsilon|\nabla(u-u_h)|^2_{L^2(\Omega)} + |u-u_h|^2_{L^2(\Omega)} = A_\epsilon(u-u_h, u-u_h).$$

Logo,

$$|||u-u_h|||^2_\epsilon = A_\epsilon(u-u_h, u-u_h) = A_\epsilon(u-u_h, u-v_h) + A_\epsilon(u-u_h, u_h-v_h).$$

Como o Método de Galerkin (C.1.6) é consistente, isto é, a solução exata u satisfaz o problema aproximado, obtém-se

$$A_\epsilon(u-u_h, v_h) = 0, \quad \text{para todo} \quad v_h \in V_h^k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |||u-u_h|||^2_\epsilon = A_\epsilon(u-u_h, u-v_h) &= \epsilon(\nabla(u-u_h), \nabla(u-v_h)) \\ &+ (\underline{\beta}\cdot\nabla(u-u_h), u-v_h) + (u-u_h, u-v_h). \end{aligned}$$

Observando que $|||\cdot|||_\epsilon$ (C.1.3) não possui um termo do tipo $\underline{\beta}\cdot\nabla\cdot$; aplica-se integração por partes no termo $(\underline{\beta}\cdot\nabla(u-u_h), u-v_h)$ e obtém-se da última igualdade que

$$|||u-u_h|||^2_\epsilon = \epsilon(\nabla(u-u_h), \nabla(u-v_h)) - (u-u_h, \underline{\beta}\cdot\nabla(u-v_h)) + (u-u_h, u-v_h).$$

Agora, tomando o módulo em ambos os lados da equação acima e utilizando a desigualdade de Young, encontra-se

$$\begin{aligned} |||u-u_h|||^2_\epsilon &\leq \frac{\epsilon}{2}|\nabla(u-u_h)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}|\nabla(u-v_h)|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{1}{4}|u-u_h|^2_{L^2(\Omega)} + |\underline{\beta}\cdot\nabla(u-v_h)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}|u-u_h|^2_{L^2(\Omega)} + |u-v_h|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agrupando termos convenientes do lado esquerdo da desigualdade, tem-se

$$|||u-u_h|||^2_\epsilon \leq \epsilon|\nabla(u-v_h)|^2_{L^2(\Omega)} + 2|\underline{\beta}\cdot\nabla(u-v_h)|^2_{L^2(\Omega)} + 2|u-v_h|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{C.1.7}$$

Fazendo $v_h = u_I$ (u_I é a interpolante de u) em (C.1.7) usando a seguinte estimativa da teoria de interpolação [6]

$$|u-u_I|_{L^2(\Omega)} + h|u'-u'_I|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1}, \tag{C.1.8}$$

onde $|\cdot|_{k+1}$ denota a semi-norma de $H^{k+1}(\Omega)$. Logo, é possível estimar

$$|||u-u_h|||_\epsilon = |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + \epsilon^{1/2}|\nabla(u-u_h)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k|u|_{k+1}. \tag{C.1.9}$$

Finalmente, concluímos de (C.1.9) que

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k|u|_{k+1} \quad \text{(C.1.10)}$$

$$|\nabla(u - u_h)|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{h^k}{\sqrt{\epsilon}}|u|_{k+1}. \quad \text{(C.1.11)}$$

A norma $|||\cdot|||_\epsilon$ (C.1.3) é denominada *norma da energia*. Como podemos notar esta norma não garante controle sobre as derivadas de ordem mais alta (*estabilidade fraca*). Em (C.1.11) quando $\epsilon \ll 1$ a solução u_h torna-se altamente oscilante a medida que $\epsilon \longrightarrow 0$. Este fato deve-se a *fraca estabilidade do método de Galekin para problemas com pouca difusão*. Além disso, a estimativa apresentada em (C.1.10) *é sub-ótima* já que para a norma L^2 a função (problemas elípticos) deve exibir taxa de convergência uma ordem superior a do seu gradiente, ou seja, $O(h^{k+1})$. Esta propriedade (taxa de convergência ótima para a função na norma L^2) pode ser demonstrado utilizando-se o *truque de Nitshe* [21].

O Método SUPG

O método aplicado aqui será o método estabilizado de elementos finitos denominado SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) [9], o qual está baseado numa formulação de Petrov-Galerkin com funções peso discontínuas [9]. Este método acrescenta estabilidade ao problema, é consistente (não há perda de precisão) e possui estimativa de erro quasi-ótima para o caso de convecção dominante, ou seja, quando $\epsilon << h$.

Supondo que $0 < \epsilon < h$ e que δ seja um parâmetro arbitrário suficientemente pequeno de forma que $\delta = O(h)$, a formulação SUPG do problema (C.1.2) é descrita por

$$\begin{array}{c}\text{Achar} \quad u_h \in V_h^k \quad \text{tal} \quad \text{que} \\ A_h(u_h, v_h) = F_h(v_h), \forall v_h \in V_h^k.\end{array} \quad \text{(C.1.12)}$$

onde

$$\begin{aligned} A_h(u_h, v_h) &= A_\epsilon(u_h, v_h) + (-\epsilon\Delta u_h + \underline{\beta}\cdot\nabla u_h + u_h, \delta\underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h \\ F_h(v_h) &= F(v_h) + (f, \delta\underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h, \end{aligned}$$

com $(\cdot,\cdot)_h$ dado por

$$(v_h, w_h)_h = \sum_K \int_K v_h w_h \, dK, \quad \forall v_h, w_h \in T_h.$$

• Consistência: Seja u a solução do variacional (C.1.1) e u_h satisfazendo o problema discreto (C.1.12), é fácil ver que:

$$A_h(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h^k.$$

A existência e unicidade de solução para o problema aproximado (C.1.12) segue, como anteriormente, da aplicação do Teorema de Lax-Milgram . Para tal, definimos

$$|||v_h|||_h^2 = \epsilon|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \delta|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + |v_h|^2_{L^2(\Omega)}. \quad \text{(C.1.13)}$$

e consideramos a seguinte expressão para a *desigualdade inversa* [6, 9]

$$c_{inv}h^2|\Delta v_h|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad \text{(C.1.14)}$$

• Continuidade de $A_h(\cdot,\cdot)$. Da definição de $A_h(\cdot,\cdot)$ e usando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$|A_h(u_h,v_h)| \leq \epsilon|\nabla u_h|_{L^2(\Omega)}|\nabla v_h|_{L^2(\Omega)} + |\underline{\beta}\cdot\nabla u_h|_{L^2(\Omega)}|v_h|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ |u_h|_{L^2(\Omega)}|v_h|_{L^2(\Omega)} + \left(\delta\epsilon|\Delta u_h|_{L^2(\Omega)} + \delta|\underline{\beta}\cdot\nabla u_h|_{L^2(\Omega)} + \delta|u_h|_{L^2(\Omega)}\right)|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|_{L^2(\Omega)}. \quad \text{(C.1.15)}$$

Agora, aplicando a desigualde inversa (C.1.14) no termo $\delta\epsilon|\Delta u_h|_{L^2(\Omega)}$ de (C.1.15), encontra-se

$$\delta\epsilon|\Delta u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \delta\epsilon(c_{inv})^{-1/2}h^{-1}|\nabla u_h|_{L^2(\Omega)}. \quad \text{(C.1.16)}$$

Substituíndo (C.1.16) em (C.1.15) e usando a definição da norma $|||\cdot|||_h$, demonstra-se a continuidade da forma $A_h(\cdot,\cdot)$, ou seja,

$$|A_h(u_h,v_h)| \leq C|||u_h|||_h|||v_h|||_h,$$

com C uma constante positiva tal que $C = C(\delta,\epsilon,h,c_{inv}^{-1/2})$.

• Coercividade (ou Elipticidade) de $A_h(\cdot,\cdot)$: Fazendo $v_h = u_h$ na definição de $A_h(\cdot,\cdot)$ e usando a propriedade que $(v_h,\underline{\beta}\cdot\nabla v_h) = 0$, calcula-se

$$A_h(v_h,v_h) = \epsilon|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + |v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \delta|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \delta\epsilon(\Delta v_h,\underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h.$$

Aplicando a desigualdade $-2(a,b) \geq -\dfrac{\eta}{2}|a|^2_{L^2(\Omega)} - \dfrac{1}{2\eta}|b|^2_{L^2(\Omega)}$ no último termo do lado direito da identidade acima, com a escolha $\eta = c_{inv}h^2$, tem-se

$$A_h(v_h,v_h) \geq \epsilon|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + |v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \delta|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$-\frac{\epsilon}{2}c_{inv}h^2|\Delta v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{c_{inv}h^2}\delta^2|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Agora, usando a desigualdade inversa (C.1.14), tem-se

$$A_h(v_h,v_h) \geq \epsilon|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + |v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \delta|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$-\frac{\epsilon}{2}c_{inv}h^2(c_{inv}h^2)^{-1}|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\epsilon}{2}(c_{inv}h^2)^{-1}\overline{c}h\delta|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}.$$

com $\delta = \overline{c}h$. Tomando $\overline{c}$ suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{\epsilon\overline{c}}{hc_{inv}} \leq 1 \quad \text{ou seja} \quad \overline{c} \leq \frac{hc_{inv}}{\epsilon}.$$

encontra-se a seguinte expressão para a forma bilinear $A_h(\cdot,\cdot)$

$$A_h(v_h,v_h) \geq \frac{\epsilon}{2}|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|v_h|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{(C.1.17)}$$

provando a continuidade de $A_h(\cdot,\cdot)$ na norma $|||\cdot|||_h$. Finalmente, de (C.1.17) concluí-se que

$$A_h(v_h,v_h) \geq \frac{1}{2}|||v_h|||^2_h.$$

Observações:

1. Comparando a coercividade obtida com o método de Galerkin (C.1.4) com aquela apresentada pelo método SUPG (C.1.17), observa-se que a última é mais estável já que *controla* a derivada na direção das linhas de corrente, fornecendo, deste modo, maiores informações sobre a solução aproximada u_h.

2. Uma outra forma de tratar o termo $-\delta\epsilon(\Delta v_h, \underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h$ seria

$$-\delta\epsilon(\Delta v_h, \underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h \geq -\frac{\delta}{2}\epsilon^2|\Delta v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{2}|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq -\delta\epsilon(c_{inv}h^2)^{-1}\frac{\epsilon}{2}|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{2}|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Já que $\delta = \bar{c}h$ com $\bar{c} \leq \dfrac{hc_{inv}}{\epsilon}$, segue

$$-\delta\epsilon(\Delta v_h, \underline{\beta}\cdot\nabla v_h)_h \geq -\frac{\epsilon}{2}|\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{2}|\underline{\beta}\cdot\nabla v_h|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Seja $u_I \in V_h^k$ a interpolante de u satisfazendo as estimativas apresentadas pela equação (C.1.8). Dos resultados de coercividade e consistência do método SUPG escrevemos que para todo $u_h - u_I \in V_h^k$ vale

$$\frac{1}{2}|||u_h - u_I|||_h^2 \leq A_h(u_h - u_I, u_h - u_I) = A_h(u - u_I, u_h - u_I)$$

$$+A_h(u_h - u, u_I - u_h) = A_h(u - u_I, u_h - u_I).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}|||u_h - u_I|||_h^2 \leq A_h(u - u_I, u_h - u_I) = \epsilon(\nabla(u - u_I), \nabla(u_h - u_I)) + (\underline{\beta}\cdot\nabla(u - u_I), u_h - u_I)$$

$$+(u - u_I, u_h - u_I) + \delta(-\epsilon\Delta(u - u_I), \underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I))$$
$$+\delta(\underline{\beta}\cdot\nabla(u - u_I), \underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I)) + \delta(u - u_I, \underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I)).$$

Deste modo,

$$\frac{1}{2}|||u_h - u_I|||_h^2 \leq T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6. \tag{C.1.18}$$

Vamos limitar cada termo T_i, $i = 1, \ldots, 6$ de (C.1.18), para isto aplica-se várias vezes a desigualdade $|(a, b)| \leq \dfrac{\eta}{2}|a|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{1}{2\eta}|b|^2_{L^2(\Omega)}$, com $\eta > 0$ conveniente. Segue que

$$T_1 \leq |\epsilon(\nabla(u - u_I), \nabla(u_h - u_I))| \leq \frac{\epsilon\eta_1}{2}|\nabla(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2\eta_1}|\nabla(u_h - u_I)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando integração por partes em T_2, tem-se

$$T_2 \leq |(\underline{\beta}\cdot\nabla(u - u_I), u_h - u_I)| = |(u - u_I, \underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I))|$$

$$\leq \frac{\eta_2}{2}\delta^{-1}|u - u_I|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\eta_2}\delta|\underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Na sequência, encontra-se que

$$T_3 \leq |(u - u_I, u_h - u_I)| \leq \frac{\eta_3}{2}|u - u_I|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\eta_3}|u_h - u_I|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$T_4 \leq |\delta(-\epsilon\Delta(u - u_I), \underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I))_h|$$
$$\leq \frac{\eta_4}{2}\delta\epsilon^2|\Delta(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2\eta_4}|\underline{\beta}\cdot\nabla(u_h - u_I)|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$T_5 \leq |\delta(\underline{\beta} \cdot \nabla(u - u_I), \underline{\beta} \cdot \nabla(u_h - u_I))_h|$$
$$\leq \frac{\eta_5}{2}\delta|\underline{\beta} \cdot \nabla(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2\eta_5}|\underline{\beta} \cdot \nabla(u_h - u_I)|^2_{L^2(\Omega)},$$

e

$$T_6 \leq |\delta(u - u_I, \underline{\beta} \cdot \nabla(u_h - u_I))_h| \leq \frac{\eta_6}{2}\delta|u - u_I|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2\eta_6}|\underline{\beta} \cdot \nabla(u_h - u_I)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando $\eta_1 = \eta_3 = 2$ e $\eta_2 = \eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 8$, agrupando os termos semelhantes e substituindo em (C.1.18), obtém-se

$$\frac{1}{2}|||u_h - u_I|||^2_h \leq \epsilon|\nabla(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)} + (1 + 4\delta^{-1} + 4\delta)|u - u_I|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+4\delta\epsilon^2|\Delta(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)} + 4\delta|\underline{\beta} \cdot \nabla(u - u_I)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Então pela teoria de interpolação (C.1.8), calcula-se as taxas de convergência

$$|||u_h - u_I|||^2_h \leq 2\epsilon Ch^{2k}|u|^2_{k+1} + 2(1 + 4\delta^{-1} + 4\delta)Ch^{2k+2}|u|^2_{k+1}.$$
$$+8\delta\epsilon^2 Ch^{2k-2}|u|^2_{k+1} + 8|\underline{\beta}|_\infty \delta Ch^{2k}|u|^2_{k+1}$$

Levando em conta que $\epsilon < h$ e $\delta = O(h)$, segue da última desigualdade que

$$|||u_h - u_I|||_h \leq \tilde{C}h^{k+1/2}|u|_{k+1}. \tag{C.1.19}$$

Agora, escrevendo o erro $u - u_h = u - u_I + u_I - u_h$, aplicando a desigualdade triangular ($\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$), considerando a estimativa (C.1.19) e utilizando novamente a teoria de interpolação, concluímos que

$$|||u - u_h|||_h \leq Ch^{k+1/2}|u|_{k+1}. \tag{C.1.20}$$

A estimativa em (C.1.20) é *quasi-ótima* pois $|(u - u_h)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1/2}|u|_{k+1}$. Porém, se comparada com aquela apresentada pelo método de Galerkin (C.1.10) observa-se um ganho da ordem de $h^{1/2}$ ($O(h^{1/2})$.

Notemos que ao proceder com a estimativa de erro do método SUPG primeiramente usamos o artifício de se calcular o erro para a diferença $u_h - u_I$. Isto deve-se ao fato de que sendo em ambos os casos $\epsilon \neq 0$, a coercividade do problema aproximado foi obtida a partir da aplicação da desigualdade inversa no termo $\epsilon\Delta v_h$. Portanto, só é válida no caso de estarmos trabalhando com elementos do espaço V_h^k (dimensão finita). Já com o método de Galerkin, calculou-se diretamente o erro $u - u_h$ porque a coercividade foi demonstrada primeiramente para o caso contínuo e então transferida para o discreto. Em outras palavras, desde que $u - u_h \in V$ é permitido calcular $A_\epsilon(u - u_h, u - u_h) \geq C|||u - u_h|||^2_\epsilon$ diretamente.

C.2 O Problema Transiente

Seja agora $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $Q = \Omega \times [0, T]$ um cilindro com fronteira $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$, onde $\Gamma = \partial\Omega$, então o problema de valor inicial e de fronteira para a equação do calor é dado por

$$\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u & = & 0 & \text{em} \quad Q \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) & = & u_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{array} \tag{C.2.21}$$

onde $u = u(x,t)$ representa a dissipação do calor na região Q. A equação do calor $(C.2.21)_1$ é caracterizada como uma equação parabólica. Aqui, considera-se um problema homogêneo com força externa f nula, para simplificação dos cálculos, sem perda de generalidade.

Inicialmente encontra-se a formulação variacional de (C.2.21). Multiplicando $(C.2.21)_1$ por $v \in V = H_0^1(\Omega)$, integrando em Ω e aplicando o Lema de Green (1.2.6) , obtém-se

$$(u_t, v) + (\nabla u, \nabla v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{C.2.22}$$

Na próxima seção trataremos da aproximação do problema variacional (C.2.22).

C.2.1 O Problema Semi-Discreto

Como na seção anterior, seja

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\Omega);\ v_h|_K \in P_k(K)\} \subset V = H_0^1(\Omega),$$

definido em (C.1.5). O *método de Galerkin* aplicado ao problema (C.2.22) é dado por

$$\begin{aligned} &\text{Achar} \quad u_h(t) \in V_h^k \quad \text{tal que} \\ &(u_{h,t}(t), v_h) + (\nabla u_h(t), \nabla v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^k, \end{aligned} \tag{C.2.23}$$

com $t \in [0,T]$, e $u_{h,t}$ a derivada de $u_h(t)$ em relação à variável t. Lembre-se que para cada $t \in [0,T]$, $u_h(t) \in V_h^k$. Por simplicidade, no texto que se segue, usaremos a notação u_h no lugar de $u_h(t)$. O problema (C.2.23) é chamado de *aproximação semi-discreta* ou *aproximação contínua no tempo*, desde a variável temporal não está sendo discretizada.

A análise numérica de equações parabólicas está baseada na definição de uma *função comparativa* $\tilde{u}_h$ que é solução de um problema elíptico auxiliar. Portanto, a idéia é escrever o erro $u - u_h$ da seguinte forma:

$$u - u_h = u - \tilde{u}_h + \tilde{u}_h - u_h, \tag{C.2.24}$$

onde a primeira parte de (C.2.24), isto é, a diferença $u - \tilde{u}_h$ é calculada pela teoria das equações elípticas a qual sabemos estimar, via teoria de interpolação (C.1.8). A segunda parte, $\tilde{u}_h - u_h$ é a diferença de duas funções no espaço de dimensão finita V_h^k. Devemos então encontrar uma relação entre estas duas parcelas. Denota-se

$$\rho_u = u - \tilde{u}_h \qquad \text{e} \qquad e_u = u_h - \tilde{u}_h,$$

observando que $e_u \in V_h^k$. Logo, das definições acima e voltando à equação semi-discreta (C.2.23), calcula-se

$$\begin{aligned} (e_{u,t}, v_h) + (\nabla e_u, \nabla v_h) &= (u_{h,t} - \tilde{u}_{h,t}, v_h) + (\nabla(u_h - \tilde{u}_h), \nabla v_h) = \\ &= (u_{h,t}, v_h) + (\nabla u_h, \nabla v_h) - [(\tilde{u}_{h,t}, v_h) + (\nabla \tilde{u}_h, \nabla v_h)]. \end{aligned} \tag{C.2.25}$$

Já que $u_h \in V_h^k$ é a solução do problema semi-discreto (C.2.23) a soma das duas primeiras parcelas de (C.2.25) é igual a zero. Portanto, somando e subtraindo o termo $(\nabla u, \nabla v_h)$ em (C.2.25), segue que

$$(e_{u,t}, v_h) + (\nabla e_u, \nabla v_h) = (\nabla(u - \tilde{u}_h), v_h) + (\nabla u, \nabla v_h) - (\tilde{u}_{h,t}, v_h).$$

Usando o fato que $V_h^k \subset V$ e relembrando a formulação variacional (C.2.22), observamos que $(\nabla u, \nabla v_h) = (u_t, v_h)$. Portanto,

$$(e_{u,t}, v_h) + (\nabla e_u, \nabla v_h) = (\nabla(u - \tilde{u}_h), v_h) + (u_t - \tilde{u}_{h,t}, v_h),$$

ou seja,

$$(e_{u,t}, v_h) + (\nabla e_u, \nabla v_h) = (\nabla(u - \tilde{u}_h), v_h) + (\rho_{u,t}, v_h), \tag{C.2.26}$$

onde $\rho_{u,t} = u_t - \tilde{u}_{h,t}$. Deste modo, a equação (C.2.26) relaciona as variáveis ρ_u e e_u como estávamos buscando.

Resta agora apresentar uma definição para a função auxiliar $\tilde{u}_h$. Por conveniência (usando da teoria das equações elípticas) toma-se $\tilde{u}_h$ como sendo a *projeção elíptica de u em V_h^k*, ou seja, escolhe-se $\tilde{u}_h$ satisfazendo o problema

$$(\nabla \tilde{u}_h, \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h), \quad v_h \in V_h^k. \tag{C.2.27}$$

Sendo $((u, v)) = (\nabla u, \nabla v)$ o produto interno em $V = H_0^1(\Omega)$, então $\tilde{u}_h$ é a projeção de u em relação à este produto interno. Portanto, usando a definição (C.2.27) em (C.2.26), tem-se

$$(e_{u,t}, v_h) + (\nabla e_u, \nabla v_h) = (\rho_{u,t}, v_h). \tag{C.2.28}$$

Vamos agora encontrar estimativas para $u - u_h$ e $\nabla(u - u_h)$ em $L^2(\Omega)$ a partir da identidade (C.2.28). Primeiramente, escolhendo $v_h = e_u = u_h - \tilde{u}_h \in V_h^k$ em (C.2.28), calcula-se

$$(e_{u,t}, e_u) + (\nabla e_u, \nabla e_u) = (\rho_{u,t}, e_u),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|e_u|^2_{L^2(\Omega)} + 2|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta}|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)} + \eta|e_u|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.29}$$

Na cálculo de (C.2.29) foi usou-se que $(e_{u,t}, e_u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_u|^2_{L^2(\Omega)}$ e a desigualdade de Young. Agora, aplicando a desigualdade de Poincaré ($|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C^2}|e_u|^2_{L^2(\Omega)}$) no segundo termo do lado esquerdo de (C.2.29)e após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\eta\frac{d}{dt}|e_u|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{2\eta}{C^2} - \eta^2\right)|e_u|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.30}$$

Tomando $\eta = \eta(C)$ tal que $\frac{2\eta}{C^2} - \eta^2 \geq 0$, encontra-se

$$\frac{d}{dt}|e_u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta}|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.31}$$

Integrando (C.2.31) de 0 a $t \in [0, T]$

$$|e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |e_u(0)|_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\eta}\int_0^t |\rho_{u,t}(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\right)^{1/2}. \tag{C.2.32}$$

A estimativa (C.2.32) não é muito adequada quando tentamos simular fenômenos mais realísticos (aqueles que acontecem em tempos muito grandes). Por exemplo, quando $t \longrightarrow \infty$ o último termo do lado direito de (C.2.32) cresce muito, ou seja, acrescenta ao lado direito contribuições cada vez maiores. Logo, (C.2.32) só valeria para um tempo finito.

Passaremos agora a calcular uma nova estimativa a partir da equação (C.2.30). Dividindo (C.2.30) por $\eta > 0$ e fazendo $C_1 = \frac{2}{C^2} - \eta > 0$ e $C_2 = \frac{1}{\eta}$, tem-se

$$\frac{d}{dt}|e_u|^2_{L^2(\Omega)} + C_1|e_u|^2_{L^2(\Omega)} \le C_2|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.33}$$

Multiplicando (C.2.33) por $\exp^{C_1 t}$, segue que

$$\frac{d}{dt}(\exp^{C_1 t}|e_u|^2_{L^2(\Omega)}) \le C_2 \exp^{C_1 t}|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando agora de 0 a $t \in [0, T]$

$$\|e_u(t)|^2 \le \exp^{-C_1 t}|e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + C_2 \int_0^t \exp^{-C_1(t-\tau)}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{C.2.34}$$

Vamos limitar o último termo do lado direito de (C.2.34). Seja,

$$C_2 \int_0^t \exp^{-C_1(t-\tau)}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \le C_2 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)} \int_0^t \exp^{-C_1(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= C_2 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)} \left(\frac{1 - \exp^{-C_1 t}}{C_1}\right) \le \frac{C_2}{C_1} \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Voltando à desigualdade (C.2.34) tem-se

$$|e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \le \exp^{-C_1 t}|e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + C_3 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$|e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \le \exp^{-\frac{C_1}{2}t}|e_u(0)|_{L^2(\Omega)} + C_3 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.35}$$

A seguir, apresentaremos duas formas de estimar o termo $\|e_u(0)\|$ em (C.2.35). A primeira opção é aproximar o dado inicial através da projeção elíptica, isto é, toma-se $u_h(0) = \tilde{u}_h(0)$. Logo, $e_u(0) = u_h(0) - \tilde{u}_h(0) = 0$ e nada mais tem-se a fazer. A segunda opção é escolher o dado inicial como sendo a interpolante, ou seja, toma-se $u_h(0) = u_I(0)$ e usando a teoria de interpolação (C.1.8), o fato que $\tilde{u}_h(0)$ é a projeção elíptica de $u(0)$ e a desigualdade triangular, escreve-se

$$|e_u(0)|_{L^2(\Omega)} \le |u(0) - u_h(0)|_{L^2(\Omega)} + |u(0) - \tilde{u}_h(0)|_{L^2(\Omega)} \le Ch^{k+1}|u_0|_{k+1}.$$

Deste modo, a desigualdade (C.2.35) torna-se

$$|e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \le C_4 \exp^{-\frac{C_1}{2}t} h^{k+1}|u_0|_{k+1} + C_3 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.36}$$

A nova estimativa (C.2.36) vale para tempos infinitos. Quando $t \longrightarrow \infty$, caso de problemas de consolidação, tem-se

$$|e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \le C_3 \sup_{\tau \le t}|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}.$$

Relembramos que o erro total de discretização do problema semi-discreto (C.2.23) foi definido como sendo $u(t) - u_h(t) = e_u(t) + \rho_u(t)$, restando ainda calcular a estimativa total de erro. Pela desigualdade triangular e usando o resultado (C.2.36), obtém-se

$$|u(t) - u_h(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |e_u(t)|_{L^2(\Omega)} + |\rho_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \exp^{-C_1 t} h^{k+1}$$
$$+C_3 \sup_{\tau \leq t}(|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)} + |\rho_u(\tau)|_{L^2(\Omega)}).$$

Levando-se em conta a teoria de interpolação para as equações elípticas (C.1.8), onde $|\rho_{u,t}(t)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|u_t(t)|_{k+1}$ e $|\rho_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|u(t)|_{k+1}$, segue da última equação que

$$|u(t) - u_h(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \exp^{-C_1 t} h^{k+1} + C_3 h^{k+1}(|u_t(t)|_{k+1} + |u(t)|_{k+1}). \quad \text{(C.2.37)}$$

Em (C.2.37) apresenta-se apenas a estimativa em $L^2(\Omega)$ para função $u(t)$, resta ainda encontrar a estimativa em $L^2(\Omega)$ para o gradiente da função, ou seja, para $|\nabla(u(t) - u_h(t))|_{L^2(\Omega)}$. Toma-se $v_h = e_{u,t}$ em (C.2.28) e aplica-se a desigualdade de Young. Logo, tem-se

$$|e_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\eta}|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\eta}{2}|e_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$C_5|e_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)},$$

com $C_5 = 1 - \frac{\eta}{2} > 0$ e $C_6 = \frac{1}{2\eta}$. Já que $C_5|e_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e integrando de 0 a $t \in [0, T]$, obtém-se

$$|\nabla e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_7|\nabla e_u(0)|_{L^2(\Omega)} + C_8 \left(\int_0^t |\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau\right)^{1/2}. \quad \text{(C.2.38)}$$

Novamente, observa-se que (C.2.38) é válida somente para um tempo finito pois quando $t \longrightarrow \infty$ o último termo do lado direito acrescenta números positivos cada vez maiores na equação. Portanto, apresenta-se a seguir uma estimativa para $|u - u_h|_{L^2(\Omega)} + |\nabla(u - u_h)|_{L^2(\Omega)}$ com *decaimento*. Tomando-se agora $v_h = e_u + e_{u,t}$ em (C.2.28) e após manipulações algébricas, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} + |e_u|^2_{L^2(\Omega)}) + C_9(|\nabla e_u|^2_{L^2(\Omega)} + |e_u|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C_{10}|\rho_{u,t}|^2_{L^2(\Omega)}. \quad \text{(C.2.39)}$$

Analogamente ao caso da estimativa (C.2.36), multiplica-se (C.2.39) por $\exp^{C_9 t}$ e integra-se em [0,T], encontrando

$$|e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp^{-C_9 t}(|e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)})$$
$$+ C_{10}\int_0^t \exp^{-C_9(t-\tau))} |\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \quad \text{(C.2.40)}$$

Relembrando que $|e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$ é a norma da energia. Sabendo que

$$\int_0^t \exp^{-C_9(t-\tau)} |\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \leq \frac{1}{C_9}\sup_{\tau \leq t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)},$$

tem-se de (C.2.40) que

$$|e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla e_u(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp^{-C_9 t}(|e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla e_u(0)|^2_{L^2(\Omega)})$$

$$+C_{11}\sup_{\tau\leq t}|\rho_{u,t}(\tau)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré ($\|e_u(0)\|^2 \leq C^2\|\nabla e_u(0)\|^2$, considerando que $\|e_u(t)\| \geq 0$ e calculando a raiz quadrada de ambos os lados da última desigualdade, tem-se

$$|\nabla e_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_{12}(|\nabla e_u(0)|_{L^2(\Omega)} + \sup_{\tau\leq t}|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}). \tag{C.2.41}$$

Finalmente, para a estimativa de erro total adiciona-se a (C.2.41) a parte relativa ao erro da projeção elíptica, ou seja,

$$|\nabla(u(t)-u_h(t))|_{L^2(\Omega)} \leq \\ C_{13}(|\nabla(u(0)-u_h(0))|_{L^2(\Omega)} + \sup_{\tau\leq t}(\|\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)} + |\nabla\rho_u(t)|_{L^2(\Omega)}.$$

Consequentemente, escolhendo $\|\nabla(u(0)-u_h(0))\| \leq Ch^k|u(0)|_{k+1}$ e usando a teoria de interpolação ($|\nabla\rho_u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k|u(t)|_{k+1}$), obtém-se

$$|\nabla(u(t)-u_h(t))|_{L^2(\Omega)} \leq C_{14}h^k(|u_t(t)|_{k+1} + |u(t)|_{k+1}). \tag{C.2.42}$$

Combinando as estimativas (C.2.37) e (C.2.42) concluí-se que a taxa de convergência do erro para a função, do problema semi-discreto (C.2.23), na norma $H^1(\Omega)$, é da ordem de h^k, e da ordem de h^{k+1}, na norma $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$|u(t)-u_h(t)|_{L^2(\Omega)} + h|\nabla(u(t)-u_h(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_{15}h^{h+1}(|u_t(t)|_{k+1} + |u(t)|_{k+1}). \tag{C.2.43}$$

A estimativa (C.2.43) apresenta taxas ótimas de convergência .

C.2.2 O Problema Totalmente Discretizado

Vamos agora analisar numéricamente o problema do calor (C.2.21) quando as variáveis espaço e tempo são discretizadas. Para tanto, será aplicado o método de diferenças finitas na discretização temporal, mais precisamente o esquema de Euler Implícito , e o método de Galerkin de elementos finitos na aproximação espacial. Esta metodologia é conhecida como o método de Rothe , ou seja, discretiza-se no tempo e depois no espaço.

Primeiramente, denota-se $u_t(t)$ por $\partial_t u(t)$ e dividi-se o intervalo $[0,T]$ em subintervalos $[t_{m-1},t_m]$, onde $t_m = m\Delta T$, $m = 1,\ldots,K$ com $t_0 = 0$ e $t_K = T$. Além disso, seja $u^m = u(t_m)$. Logo, o esquema de Euler Implícito para aproximar o termo $u_t(t)$ é dado por:

$$u_t(t_m) = \partial_t u^m \approx \frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t}. \tag{C.2.44}$$

Substituindo (C.2.44) no problema variacional (C.2.22) e usando o método de Galerkin, o problema *totalmente discretizado* lê-se: Dado $m = 1,\ldots,K$, achar $u_h^m \in V_h^k$ tal que

$$(\partial_t u_h^m, v_h) + (\nabla u_h^m, \nabla v_h) = 0, \quad \text{para todo} \quad v_h \in V_h^k. \tag{C.2.45}$$

Na análise numérica do problema (C.2.45) também lançamos mão de uma variável auxiliar $\tilde{u}_h^m$, a projeção elíptica de u^m, que satisfaz

$$(\nabla\tilde{u}_h^m, v_h) = (\nabla u, \nabla v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \tag{C.2.46}$$

Novamente, partindo das definições para o erro apresentadas no caso semi-discreto, tem-se

$$u(t_m) - u_h^m = (u(t_m) - \tilde{u}_h^m) + (\tilde{u}_h^m - u_h^m), \tag{C.2.47}$$

onde $\rho_u^m = u(t_m) - \tilde{u}_h^m$ pode ser estimada pela teoria de interpolação, ou seja, de (C.2.46), obtemos $|\rho_u^m|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|u^m|_{k+1}$. O segundo termo de (C.2.47), $e_u^m = \tilde{u}_h^m - u_h^m$, deve ainda ser estimado. Seguindo o mesmo raciocíonio da seção anterior, quando obteve-sea o problema variacional que relacionava ρ_u e e_u (C.2.28), resulta aqui também que

$$(\partial_t e_u^m, v_h) + (\nabla e_u^m, \nabla v_h) = (w^m, v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k, \tag{C.2.48}$$

onde $w^m = u_t(t_m) - \partial_t \tilde{u}_h^m$. Lembre-se que no caso semi-discreto tínhamos $\rho_{u,t} = u_t - \tilde{u}_{h,t}$ no lugar de w^m em (C.2.48). Somando e substraindo $\partial_t u(t_m)$ em w^m, segue que

$$w^m = (\partial_t u(t_m) - \partial_t \tilde{u}_h^m) + (u_t(t_m) - \partial_t u(t_m)) = w_1^m + w_2^m, \tag{C.2.49}$$

com $w_1^m = \partial_t u(t_m) - \partial_t \tilde{u}_h^m = \partial_t \rho_u^m$ e $w_2^m = u_t(t_m) - \partial_t u(t_m)$. Assim,

$$w^m = \partial_t \rho_u^m + (u_t(t_m) - \partial_t u(t_m)),$$

onde o primeiro termo vem do erro dado pela discretização através do método de Galerkin (aproximação espacial) e o segundo (a soma de duas parcelas) provém do esquema de Euler Implícito (aproximação temporal).

A seguir, vamos calcular estimativas em $L^2(\Omega)$ para o erro definido em (C.2.47). Fazendo $v_h = e_u^m \in V_h^k$ em (C.2.48), tem-se

$$(\partial_t e_u^m, e_u^m) + (\nabla e_u^m, \nabla e_u^m) = (w^m, e_u^m).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição do operador $\partial_t^m \cdot$, obtém-se

$$\left(\frac{e_u^m - e_u^{m-1}}{\Delta t}, e_u^m\right) + |\nabla e_u^m|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |w^m|_{L^2(\Omega)} |e_u^m|_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\frac{|e_u^m|_{L^2(\Omega)}^2 - |e_u^{m-1}|_{L^2(\Omega)} |e_u^m|_{L^2(\Omega)}}{\Delta t} + |\nabla e_u^m|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |w^m|_{L^2(\Omega)} |e_u^m|_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.50}$$

Logo, já que $|\nabla e_u^m|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ e simplificando os termos semelhantes, segue que

$$|e_u^m|_{L^2(\Omega)} \leq |e_u^{m-1}|_{L^2(\Omega)} + \Delta t |w^m|_{L^2(\Omega)}. \tag{C.2.51}$$

É fácil ver que a desigualdade (C.2.51) acarretará numa estimativa de erro *sem decaimento*. De fato, somando (C.2.51) para todos os intervalos de tempo de 1 a m, tem-se

$$\|e^m\| \leq \|e_u^0\| + \Delta t \sum_{j=1}^{m} \|w^j\|. \tag{C.2.52}$$

Em (C.2.52) resta estimar os erros provenientes de $w^j = w_1^j + w_2^j$. Primeiramente, seja

$$w_1^j = \partial_t \rho_u^j = \frac{\rho_u^j - \rho_u^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_{u,t}(\tau) \, d\tau.$$

Deste modo,

$$|w_1^j|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}\, d\tau,$$

ou seja,

$$\Delta t \sum_{j=1}^{m} |w_1^j|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^{t_m} |\rho_{u,t}(\tau)|_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{C.2.53}$$

A estimativa (C.2.54) é idêntica àquela obtida no caso semi-discreto sem decaimento. Vamos agora limitar o termo $w_2^j = u_t(t_j) - \partial_t u(t_j)$. Tem-se

$$w_2^j = u_t(t_j) - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) u_{tt}(\tau)\, d\tau. \tag{C.2.54}$$

Logo, de (C.2.54) encontra-se

$$\Delta t |w_2^j|_{L^2(\Omega)} \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |(\tau - t_{j-1}) u_{tt}(\tau)|_{L^2(\Omega)}\, d\tau.$$

Já que $|\tau - t_{j-1}| \leq \Delta t$ e somando os termos de 1 a m, obtém-se

$$\Delta t \sum_{j=1}^{m} |w_2^j|_{L^2(\Omega)} \leq \Delta t \int_0^{t_m} |u_{tt}(\tau)|_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{C.2.55}$$

Combinando as limitações apresentadas em (C.2.53) e (C.2.55) com (C.2.52) e as estimativa dadas pela teoria de interpolação, chega-se na seguinte estimativa de erro

$$|e^m|_{L^2(\Omega)} \leq |e_u^0|_{L^2(\Omega)} + Ch^{k+1}\int_0^{t_m} |u_t(\tau)|_{k+1}\, d\tau + \Delta t \int_0^{t_m} |u_{tt}(\tau)|_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{C.2.56}$$

Outra vez, observa-se que (C.2.56) não possui decaimento, pois a medida que o tempo cresce os termos do lado direito aumentam. Deste modo, partindo da equação (C.2.50), buscaremos uma estimativa em $L^2(\Omega)$ com decaimento. Aplicando a desigualdade de Poincaré no segundo termo do lado esquerdo de (C.2.50), segue que

$$\frac{|e_u^m|^2_{L^2(\Omega)} - |e_u^{m-1}|_{L^2(\Omega)}|e_u^m|_{L^2(\Omega)}}{\Delta t} + C|e_u^m|^2_{L^2(\Omega)} \leq |w^m|_{L^2(\Omega)}|e_u^m|_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$|e_u^m|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C\Delta t)^{-1}(|e_u^{m-1}|_{L^2(\Omega)} + \Delta t|w^m|_{L^2(\Omega)}).$$

Agora, somando as equações de 1 a m, obtém-se

$$|e_u^m|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C\Delta t)^{-m}\left(|e_u^0|_{L^2(\Omega)} + C_{15}\Delta t \sum_{j=1}^{m} |w^j|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{C.2.57}$$

Observa-se que quando m cresce muito, ou seja, $m \longrightarrow \infty$, a expressão $(1+C\Delta t)^{-m}$ tem um comportamento do tipo $\exp^{-Ct_m}$, pois $f_m = (1 + C\Delta t)^{-m} = (\frac{m+Ct_m}{m})^{-m}$ já que $\Delta t = \frac{t_m}{m}$, por definição. Deste modo, a estimativa (C.2.57) possui um decaimento do tipo exponencial, conforme obtido no caso semi-discreto.

Finalmente, combinando os resultados (C.2.57), (C.2.53), (C.2.55), a definição do erro $u(t_m) - u_h^m$ com a desigualdade triangular, conclu´ i-se que

$$|u(t_m) - u_h^m| \leq C_{16}\left(h^{k+1}\int_0^T |u_t(t)|_{k+1}\, dt + \Delta t \int_0^T |u_{tt}(t)|_{L^2(\Omega)}\, ds\right). \tag{C.2.58}$$

A estimativa (C.2.58) diz que o erro total na discretização espaço-tempo para a função, na norma $L^2(\Omega)$, é da ordem de $h^{k+1} + \Delta t$. Por causa da escolha não simétrica na discretização temporal *o método de Euler-Galerkin é apenas de primeira ordem no tempo.*

Finalmente, apresenta-se um outro método de discretização temporal, com taxa de convergência da ordem de $(\Delta t)^2$, *o Método de Crank-Nicolson* . Este método aproxima a equação semi-discreta de uma forma simétrica ao redor do ponto

$$t_{n-1/2} = (n - 1/2)\Delta t,$$

ou seja, o problema totalmente discretizado lê-se agora como: Dado $m = 1, \dots, K$, achar $u_h^m \in V_h^k$ tal que

$$(\partial_t u_h^m, v_h) + (\nabla(\frac{u_h^m + u_h^{m-1}}{2}), \nabla v_h) = 0, \quad \text{para todo} \quad v_h \in V_h^k. \tag{C.2.59}$$

C.3 Exercícios

1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$, o problema de convecção-difusão-reação é definido como:

$$\begin{aligned} &-\epsilon\Delta u + \underline{\beta} \cdot \nabla u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ &div\ \underline{\beta} = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ &u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{C.3.60}$$

   com $\underline{\beta} \in (L^\infty(\Omega))^2 = L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$ funções conhecidas. Calcule a formulação variacional, ou formulação fraca, do problema (C.3.60).

2. Consideramos uma condição de Neumman no problema acima, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$ apresente a formulação fraca.

3. Se $\epsilon = 1$, $\underline{\beta} = 0$ mostre que a solução aproximada u_h do problema correspondente, com condição de Dirichlet homogênea e $f \in L^2(\Omega)$, dada pelo método de Galerkin, possui taxas ótimas de convergência na norma-L^2.

4. Integre por partes o termo

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) u_{tt}(\tau)\, d\tau$$

   e conclua que é igual a $w_2^j = u_t(t_j) - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{\Delta t}$.

5. Mostrar que o método Crank-Nicolson-Galerkin, definido em (C.2.59), apresenta taxa de convergência da ordem de $(\Delta t)^2$ no tempo.
   Sugestão: Lembremos que a estimativa para $\|\rho_u^m\|$ é conhecida pela teoria de interpolação. Portanto, resta estimar somente $\|e_u^m\|$, para isto seguimos raciocínio análogo ao do método Euler-Galerkin obtendo a seguinte equação a partir de (C.2.59):

$$(\partial_t e_u^m, v_h) + (\nabla(\frac{e_u^m + e_u^{m-1}}{2}), \nabla v_h) = -(w^m, v_h), \tag{C.3.61}$$

onde

$$\begin{aligned} w^m &= \partial_t(\tilde{u}_h^m - u(t_m)) + (\partial_t u(t_m) - u(t_{m-1/2})) \\ &+ \Delta(u(t_{m-1/2}) - \frac{1}{2}(u(t_m) + u(t_{m-1}))) = w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned} \tag{C.3.62}$$

Escolhe-se $v_h = \dfrac{e_u^m + e_u^{m-1}}{2}$ em (C.3.61) e procede-se o cálculo das estimativas.

Bibliografia

[1] BREZIS, H. *Analyse Fonctionelle (Theórie et Applications*. Paris: Masson, 1983.

[2] CAMPBELL, P. J. The origin of Zorn's lemma. *Historia Mathematica*, v. 5, p. 77–89, 1978.

[3] DIAS, C. L. da S.; HONIG, C. S.; MEDEIROS, L. A. Leopoldo Nachbin. *Revista Matematica Universitaria*, v. 16, p. 19–21, 1994.

[4] FORSYTH, A. R. *Calculus of Variation*. New York, USA: Dover Publications, INC, 1960.

[5] GELFAND, I. *Les Distributions*. Paris: Dunod, 1952.

[6] GLOWINSKI, R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. New York: Springer-Verlag, 1984.

[7] HALMOS, P. R. *Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral Multiplicity*. Second edition. New York, USA: Dover Publications, INC, 2017.

[8] INDELERLEHER, D. K. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. New York: Academic Press, 1980.

[9] JOHNSON, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. New York: Dover, 2009.

[10] LEIGHTON, W. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos Científicos Editoria, LTDA, 1970.

[11] LIONS, J. L. *Problémes aux Limites dans les Équations aux Derivées Partielle*. Montreal: Les Presses de l'Université de Montreal, 1965.

[12] MEDEIROS, L. A. *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1973.

[13] MEDEIROS, L. A.; MELO, E. A. de. *A Integral de Lebesgue*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2008.

[14] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev*: Iniciação ao Problema Elípticos Não Homogêneos. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[15] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2011.

[16] MUJICA, J. Os trabalhos de Leopoldo Nachbin. *Revista Matemática Universitária*, v. 16, p. 22–36, 1994.

[17] RODRIGUES, J. F. *Obstacle Problems in Mathematical Physics*: Mathematics studies - 134. Amsterdan: North-Holland, 1987.

[18] SCHWARTZ, L. *Théorie des Distributions*. Tome i. Paris: Hermann Edit., 1959.

[19] SOBOLEV, S. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Providence: AMS Translations, 1963.

[20] SOMERFELD, A. *Mechanics*: Letures on Theoretical Physics - vol. i. New York: Academic Press, 1952.

[21] THOMEE, V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*: Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1984.

Índice

Convergência Forte, 10
Convergência Fraca, 10

Derivada de Gateaux, 3, 57
Derivada de Schwartz, 14
Derivada de Sobolev, 14
Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 8
Desigualdade de Poincaré, 8
Desigualdade Inversa, 68
Distribuição, 11, 16, 26

Elipticidade/Coercividade, 66
Equação de Convecção-Difusão-Reação, 65
Equação de Dirichlet, 22, 34
Equação de Euler, 21
Equação de Neumann, 23
Equação do Calor, 48, 71
Equação Linear de Ondas, 39
Espaço de Hilbert, 5
Espaço de Sobolev, 16
Espaço Dual, 9, 17, 43
Estimativa Interpolante, 67, 70–72, 74

Forma Linear Contínua, 8, 9
Função Traço, 17, 23, 52

Identidade do Paralelograma, 6
Inequação Variacional, 36, 38

Lema de Du Bois Raymond, 12, 57
Lema de Green, 3, 23, 25, 34, 44, 72
Lema de Riesz-Fréchet, 8, 9, 11, 19, 26, 28, 37, 43

Método de Crank-Nicolson, 79
Método de Diferenças Finitas, 76
Método de Elementos Finitos, 66
Método de Euler Implícito, 76
Método de Euler-Galerkin, 79
Método de Faedo-Galerkin, 40
Método de Galerkin, 29, 34, 67, 71, 72, 76
Método de Rothe, 76
Método SUPG, 68
Membrana Elástica, 1–3, 17, 34

Princípio da Ação Mínima, 2
Princípio de Hamilton, 57, 59
Problema Bem Posto - Hadamard, 27
Problema da Membrana, 27, 31
Problema da Membrana com Obstáculo, 35
Problema Misto, 25
Problema Variacional Abstrato, 37
Projeção Elíptica, 73

Sequência de Cauchy, 10, 51
Solução Fraca, 34, 48, 55, 56, 58, 59
Suporte de uma Função, 11

Taxas de Convergência, 76
Teorema da Projeção, 7
Teorema de Bolzano-Weierstrass, 10
Teorema de Hahn-Banach, 61, 64
Teorema de Lax-Milgram, 19, 22, 24, 27, 38, 66, 68
Teorema de Lions-Stampacchia, 37