

Volume 76, 2014

Editores

Fernando Rodrigo Rafaeli (Editor Chefe)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil

Alexandre Loureiro Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC
Petrópolis, RJ, Brasil

Edson Luiz Cataldo Ferreira

Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói, RJ, Brasil

Jorge Manuel Vieira Capela

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Araraquara, SP, Brasil

Sandra Augusta Santos

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/p_notas.php

Matemática Aplicada ao Planejamento da Produção e Logística

Silvio Alexandre de Araujo
saraujo@ibilce.unesp.br

Socorro Rangel
socorro@ibilce.unesp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Universidade Estadual Paulista

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2014



Coordenação Editorial: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Coordenação Editorial da Série: Fernando Rodrigo Rafaeli

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2014 by Silvio A. de Araujo e Socorro Rangel. Direitos reservados, 2014 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

de Araujo, Silvio A.
Matemática Aplicada ao Planejamento da Produção e
Logística - São Carlos, SP :
SBMAC, 2014, 75 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 76)

e-ISBN 978-85-8215-062-7

1. Modelagem Matemática 2. Otimização 3. Dimensionamento de Lotes
4. Programação da Produção
I. de Araujo, Silvio Alexandre II. Rangel, Socorro IV. Título. V. Série

CDD - 51

Para Lívia.
saa
Para Ágata.
sr

Agradecimentos

Queremos registrar aqui nossos agradecimentos a todos os alunos de graduação e pós-graduação que orientamos e estamos orientando, pois inspiraram e incentivaram a redação deste texto. À Michelli Maldonado, Gislaine Mara Melega, Marcos Nereu Arenales e aos pareceristas AD HOC pela leitura cuidadosa do texto. Ao CNPq pelas bolsas concedidas durante a realização deste trabalho, processos 304098/2012-4 e 306194/2012-0. À FAPESP pelos auxílios concedidos durante a realização deste trabalho, processos 2013/07375-0, 2010/10133-0 e 2011/22647-0. Ao apoio institucional da UNESP.

Conteúdo

Prefácio	xi
1 Modelagem matemática: conceitos básicos	1
1.1 Construção de um modelo matemático	1
1.2 Modelos de otimização	4
1.3 Reformulações e limitantes	7
1.4 Sistemas computacionais de modelagem e de resolução	9
1.5 Exercícios	11
2 Problemas clássicos de logística	13
2.1 O problema do caminho mínimo (PCM)	14
2.2 O problema do caixeiro viajante (PCV)	17
2.3 O problema de localização de facilidades (PLF)	22
2.4 Exercícios	25
3 O problema de dimensionamento de lotes	27
3.1 Contextualização histórica	28
3.2 Problema de dimensionamento de lotes monestágio e único-item	29
3.2.1 PDL na sintaxe da linguagem AMPL	33
3.3 Métodos básicos de solução para o PDL único-item	33
3.3.1 Heurísticas	34
3.3.2 O método ótimo de Wagner e Whitin	36
3.4 Reformulações	39
3.4.1 Reformulação por caminho mínimo	39
3.4.2 Reformulação por localização de facilidades	42
3.5 Problema de dimensionamento de lotes multi-itens	43
3.6 Problema de dimensionamento de lotes multiestágio	45
3.6.1 Estoque de escalão	47
3.7 Exercícios	49
4 O Problema de sequenciamento de tarefas	51
4.1 Exemplo e conceitos básicos	51
4.2 Modelo indexado pelo tempo	53
4.3 Exercícios	55
5 Problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes	57
5.1 Modelos para o PDSL baseados na indexação do tempo	58
5.2 Modelos baseados no PCVA	63
5.3 Exercícios	65

Prefácio

Este texto trata de problemas que aparecem no contexto da cadeia de suprimentos (em inglês *supply chain*) que envolvem decisões de longo prazo (ex. instalação de facilidades); de médio prazo (ex. atribuição de produção a fábricas, transporte da produção das fábricas para armazéns); e de curto prazo (ex. decisões tomadas semanalmente, ou mesmo diariamente, a respeito da atribuição de produtos a máquinas e a programação da produção). Em geral, ao se resolver esses problemas deseja-se utilizar os recursos disponíveis de forma racional buscando um alto índice de satisfação dos clientes a baixo custo. Mais especificamente, neste texto, são tratados problemas de planejamento da produção em que as decisões a serem tomadas devem considerar as características inerentes do processo produtivo, e que podem envolver desde a aquisição das matérias-primas, passando pelo planejamento das atividades necessárias para transformar estas em produtos finais, até a entrega dos produtos aos clientes. Em muitas indústrias, tais decisões sobre as atividades de produção estão estreitamente relacionadas à decisões sobre as quantidades de cada item a serem produzidas em determinados intervalos de tempo. Na literatura, o problema de planejamento da produção envolvendo decisões sobre quanto e quando produzir é, em geral, definido como o problema de dimensionamento de lotes (nos textos em inglês, o termo usado é *lot sizing problem*). A quantidade a ser produzida em um intervalo de tempo é chamada lote, daí o nome do problema de dimensionar o lote, ou seja determinar o tamanho do lote.

Em alguns setores industriais é importante considerar no planejamento da produção tempos e custos de preparação da linha de produção. Estes valores são, muitas vezes, dependentes da ordem em que os produtos são fabricados. Nestes casos, as decisões relativas à quantidade a ser produzida podem influenciar diretamente as decisões relativas à ordem em que os produtos devem ser fabricados, e vice-versa. O problema de determinar a ordem, ou sequência de produção respeitando, por exemplo, datas de entrega dos produtos é conhecido na literatura como problema de sequenciamento, em inglês *scheduling*. Estes dois aspectos do problema, dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, podem ser tratados de forma independente: em uma etapa é resolvido o problema de dimensionamento dos lotes e, na outra, é resolvido o problema de sequenciamento; ou de forma integrada, com modelos matemáticos que capturam simultaneamente as relações entre os dois problemas. Este último é conhecido na literatura como problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes (*lotscheduling*, em inglês).

O objetivo deste texto é oferecer um material introdutório para alunos de graduação e de pós-graduação sobre modelos matemáticos para problemas de planejamento da produção, em particular, para problemas de dimensionamento de lotes e para problemas integrados de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Para facilitar o entendimento de alguns modelos são discutidos também alguns problemas de logística. Embora sejam apresentados alguns métodos de solução, o foco deste

texto está na modelagem dos problemas. No Capítulo 1 são apresentados conceitos básicos de modelagem matemática necessários para um melhor entendimento dos tópicos contidos nos demais capítulos, e uma breve apresentação de algumas ferramentas computacionais. No Capítulo 2 são discutidos problemas clássicos de logística que serão usados posteriormente no texto. No Capítulo 3 é apresentado em detalhes o problema de dimensionamento de lotes considerando algumas de suas variações e reformulações. No Capítulo 4 considera-se o problema de sequenciamento da produção, e, no Capítulo 5, são apresentadas algumas estratégias de modelagem para a integração dos problemas de dimensionamento de lotes e de sequenciamento. Ao final de cada capítulo são propostos exercícios para fixação dos conceitos. Alguns dos exercícios irão exigir do leitor uma breve pesquisa tomando por base as referências citadas ao longo do texto.

São José do Rio Preto, 30 de Junho de 2014.

Silvio Alexandre de Araujo e Socorro Rangel

Capítulo 1

Modelagem matemática: conceitos básicos

Modelos matemáticos podem ser úteis na representação de um grande número de problemas em diversas áreas da ciência. Neste texto nos concentramos na utilização de modelos matemáticos que auxiliam a tomada de decisões relacionadas ao processo produtivo, que consiste em converter a matéria-prima em produto final entregue ao cliente e deve ser bem gerenciado para a fim de entregar um produto final com alta qualidade, dentro do prazo e com o menor custo possível. Como existe sempre um grande número de decisões possíveis, busca-se dentre elas aquela com o menor custo. Os modelos matemáticos com essas características são chamados modelos matemáticos de otimização. Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos de modelagem matemática incluindo algumas discussões sobre a qualidade de diferentes modelos para um mesmo problema. Uma breve introdução a sistemas computacionais de modelagem e solução de problemas também é apresentada. Partes deste capítulo e do Capítulo 2 foram extraídas do texto [91].

1.1 Construção de um modelo matemático

Um modelo matemático de otimização envolve a representação de um problema ou situação por um conjunto de relações matemáticas tais como: equações, inequações, dependências lógicas e uma ou mais funções a serem otimizadas. Para construir um modelo matemático que represente um determinado problema é necessário identificar inicialmente quais são os *elementos conhecidos*, isto é, informações associadas ao que sabemos sobre o problema e quais são os *elementos desconhecidos*, informações associadas ao que queremos determinar ao solucionar o problema. Esta fase inicial, em geral, é realizada de forma conjunta com o pessoal responsável pela resolução do problema, e envolve a compreensão da situação estudada. Nem sempre a identificação destes elementos é imediata, a facilidade de obtenção destas informações depende diretamente do grau de organização do setor em estudo. Muitas vezes é necessário fazer algumas simplificações iniciais da situação estudada para melhor representá-la matematicamente. Os *elementos conhecidos e desconhecidos* são importantes para a construção do modelo matemático. Com eles são definidos os objetos matemáticos (constantes, incógnitas e funções) que representam o problema.

Os *elementos desconhecidos*, em geral associados à decisão a ser tomada com a solução do problema, são modelados em termos de incógnitas, que chamaremos de

variáveis de decisão. Em geral, um grande número de valores pode ser atribuído a estas variáveis e, conseqüentemente, é necessário definir um critério, ou objetivo, para seleção da “melhor” alternativa. Em modelos de otimização linear, este critério será descrito por uma função das variáveis de decisão, que será chamada de função objetivo. Neste ponto surge a questão: “Quais são os impedimentos que restringem a tomada de decisões?”. Esses impedimentos dão origem às equações e inequações que formam o conjunto de restrições do modelo. Um modelo de otimização linear é descrito por expressões lineares: restrições e função objetivo. Os *elementos conhecidos*, chamados de dados (ou parâmetros), fornecerão os coeficientes das variáveis e os termos constantes nas restrições e na função objetivo. Em termos gerais, os principais elementos de um modelo são: identificação das possíveis soluções (variáveis de decisão); definição dos critérios de avaliação que indicarão que uma solução é preferível à outra (função objetivo); e identificação das restrições que limitam as possíveis decisões a serem tomadas (conjunto de equações ou inequações).

É importante ressaltar que o processo de construção do modelo é iterativo e pode ser dividido em três fases: modelagem, validação e implementação. Na fase de modelagem, um conjunto de variáveis de decisão é definido, uma função objetivo e um conjunto de restrições são inicialmente propostos. É possível que durante a definição da função objetivo e das restrições, novas variáveis sejam necessárias, outras restrições sejam identificadas e/ou novos termos devam ser considerados na função objetivo. Ou seja, a fase de modelagem deve ser repetida até que se obtenha um modelo bem representativo da situação estudada. Uma vez obtido um modelo inicial, começa a fase de validação do modelo. O modelo inicial é resolvido e a solução obtida deve ser analisada para verificar se ela é aceitável para a situação em estudo. Os dados utilizados nesta fase podem ser colhidos com os responsáveis pelo problema, ou gerados aleatoriamente. Neste último caso, é necessário cuidado para que os números gerados reflitam grandezas próximas dos dados reais. Esta é uma fase importantíssima, pois é nela que acharemos as principais inconsistências do modelo proposto. É muito improvável que o primeiro modelo construído reflita de forma satisfatória o problema. Novas rodadas de reuniões e depuração do modelo inicial com a inclusão e/ou remoção de variáveis, constantes e restrições são necessárias para a obtenção de um modelo mais próximo da realidade estudada. As fases de modelagem e validação são repetidas até que as partes envolvidas estejam satisfeitas com o modelo resultante.

Uma vez validado o modelo, é possível que se conclua que os métodos de solução usados na fase de validação não sejam adequados para a resolução de instâncias de tamanho real num tempo computacional condizente com a prática do dia a dia da empresa. Neste caso, é necessário pesquisas para o desenvolvimento de métodos de solução adequados antes de iniciar a fase de implementação.

A terceira e última fase, implementação, se inicia quando o modelo matemático construído é usado como ferramenta em um Sistema de Apoio à Decisões (SAD). Para tanto, é necessário que uma *interface* seja construída entre o modelo matemático, o sistema de resolução e o usuário final. Com essa *interface*, os dados referentes a uma situação particular são recuperados e transferidos para o modelo matemático. Um exemplar do problema (ou instância) é assim obtido e então traduzido para um formato especial que será lido pelo sistema de resolução. Uma vez obtida a solução desse exemplar, a *interface* deverá recuperá-la e traduzi-la para um formato apropriado ao usuário.

É também na terceira fase que a solução matemática obtida deverá ser analisada, avaliada de acordo com critérios políticos, econômicos, científicos, e possivelmente utilizada na prática. Mudanças na realidade podem requerer que o modelo seja

reavaliado (manutenção do modelo) o que requer então a repetição das três fases. O processo de construção de um modelo de otimização pode ser resumido e representado pela Figura 1.1.

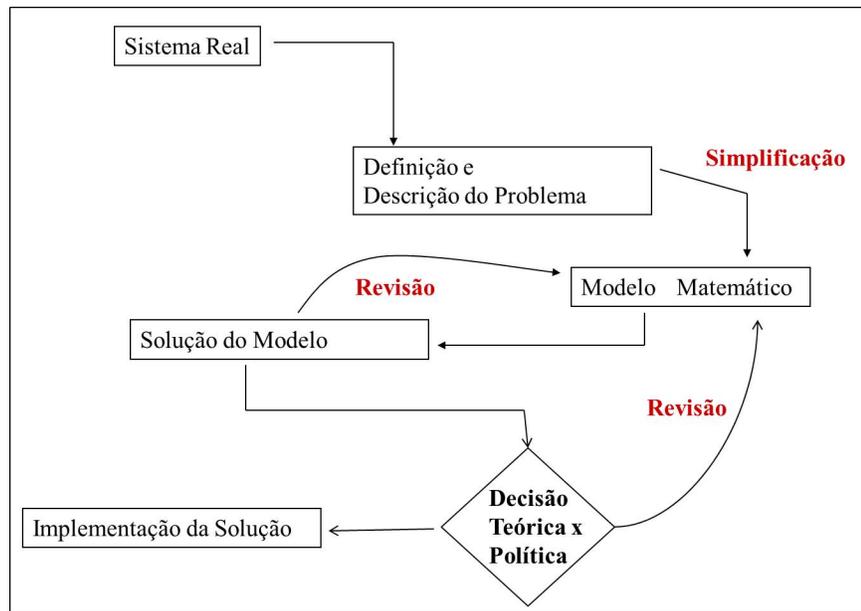


Figura 1.1: Processos envolvidos na construção de um modelo de otimização para resolução de problemas práticos.

Cabe aqui observar que existem algumas confusões a respeito da validade e uso de modelos matemáticos. Uma das críticas apontadas diz respeito a quantificação de parte dos dados usados no modelo, por exemplo como atribuir um custo a um valor social. Outra crítica está associada à precisão dos dados utilizados. Williams [100] responde a estas críticas considerando que uma série de decisões associadas a conceitos “não quantificáveis” precisam ser tomadas, e são baseadas numa caracterização implícita que não pode ser evitada. Incorporar esta decisão explicitamente num modelo matemático parece ser uma forma científica e honesta de lidar com a questão. A precisão dos dados deve ser considerada em relação a cada modelo especificamente. Apesar de uma parcela dos coeficientes de um modelo não ser precisa, ainda assim é possível que o modelo matemático produza uma boa solução para o problema. De qualquer forma é importante ter claro que o modelo matemático deve ser usado como uma de diversas ferramentas disponíveis para a tomada de decisão. A qualidade das respostas que um modelo produz depende da precisão e da estrutura dos dados do modelo. No caso dos modelos de otimização, a definição do critério de otimização, a função objetivo, também afeta fortemente a resposta do modelo.

Williams [100] observa ainda que a resposta fornecida por um modelo matemático deve ser analisada cuidadosamente. Se ela representa uma decisão que não pode ser tomada, as razões para a não aceitação desta solução devem ser analisadas e possivelmente incorporadas num novo modelo com a modificação do conjunto de restrições e/ou da função objetivo. Se a resposta for aceitável, pode ser sábio tomá-la apenas como uma opinião. Modificar a função objetivo (e conseqüentemente o modelo) pode resultar em uma outra opção. Em muitos casos pode-se questionar

as respostas fornecidas pelo modelo e modificá-las de forma adequada pode tornar mais visível as diversas possibilidades existentes e assim aumentar o grau de entendimento do problema.

1.2 Modelos de otimização

Os modelos matemáticos usados em otimização seguem em geral um padrão que é composto por uma função objetivo, um critério de otimização a minimizar (min) ou maximizar (max), o termo “sujeito a” que indica que os valores aceitos para otimizar a função objetivo devem satisfazer um conjunto de restrições, a descrição matemática das restrições na forma de equações ou inequações, e a definição do domínio das variáveis. Cada situação prática a ser resolvida influencia diretamente nas especificidades matemáticas que deverão ser consideradas no modelo, que por sua vez influenciam no nível de complexidade do método de solução empregado. A forma matemática que a função objetivo a ser minimizada (ou maximizada) irá tomar, bem como as restrições e o tipo de variável, irão definir os diversos modelos de otimização. O conjunto de soluções que satisfazem as restrições do problema é chamado de *região factível*, e uma solução que pertence a este conjunto é chamada *solução factível*.

A seguir são apresentados diversos modelos de otimização incluindo alguns exemplos simples com apenas duas variáveis ($x \in R^2$) baseados em [16]. Comentários com respeito às propriedades de cada modelo são feitos sem formalismo teórico. Vários livros descrevem em detalhes as propriedades presentes em diferentes tipos de modelos de otimização, entre eles: [16] e [81].

- **Otimização Linear Contínua (OL):** Se a função objetivo e as restrições forem lineares, e as variáveis puderem assumir valores reais, temos um modelo de otimização linear contínuo. Sejam $c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, um modelo (OL) pode ser escrito de acordo com (1.2.1)-(1.2.3).

$$\min(\text{ou } \max) \quad z = c^T x \quad (1.2.1)$$

Sujeito a:

$$Ax \leq b \quad (1.2.2)$$

$$x \geq 0, \quad x \in R^n \quad (1.2.3)$$

A região factível do problema (OL) é $P = \{x \in R^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Definindo: $c^T = (10, 6)$, $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 45 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ um exemplar (ou instância) de um modelo (OL), escrito na forma expandida, é apresentado no Exemplo 1.1.

Exemplo 1.1.

$$\max \quad z = 10x_1 + 6x_2 \quad (1.2.4)$$

Sujeito a:

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (1.2.5)$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5 \quad (1.2.6)$$

$$-x_1 - x_2 \leq -1 \quad (1.2.7)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (1.2.8)$$

Algumas propriedades do problema (OL) permitem o desenvolvimento de um método muito eficiente para a sua resolução chamado Método Simplex. A ideia básica do método simplex consiste em explorar uma propriedade do problema que garante que, se existe uma solução ótima, então existe um ponto na fronteira da região factível (ponto extremo) que é ótimo. Assim, a busca pela solução ótima pode ser feita entre os pontos extremos da região factível na direção do vetor gradiente da função objetivo ($\nabla z = (10, 6)$ no Exemplo 1.1) pois este indica uma direção de crescimento da função objetivo (no caso de termos um problema com critério de otimização igual a minimização, teríamos que considerar a direção $-\nabla z$). Existem outros métodos, tal como métodos de pontos interiores, que utilizam de outras estratégias para resolver o problema. A região factível do Exemplo 1.1 pode ser desenhada no plano, e um ponto extremo pode ser caracterizado pela intersecção de duas das cinco retas que definem a região factível. A solução ótima do problema apresentado no Exemplo 1.1 é o ponto extremo $x^* = (3\frac{1}{13}, 3\frac{6}{13})$ com valor $z^* = 51\frac{7}{13}$. Mais detalhes sobre métodos de solução para problemas de otimização linear contínua podem ser encontrados em, por exemplo, [16] e [103].

- Otimização inteira (OI): Se no modelo (OL) restringirmos as variáveis de forma que só possam assumir valores inteiros, isto é, trocar o domínio das variáveis para $x \in \mathbb{Z}^n$ teremos um modelo de otimização linear inteira, modelo (1.2.9)-(1.2.11). Nesta classe de modelos estão aqueles em que os valores inteiros que as variáveis podem assumir se restringem a 0 ou 1 (variáveis binárias), dizemos então que temos um modelo de otimização linear binário.

$$\min(\text{ ou } \max) \quad z = c^T x \quad (1.2.9)$$

Sujeito a:

$$Ax \leq b \quad (1.2.10)$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \quad (1.2.11)$$

O Exemplo 1.2, adaptado do Exemplo 1.1, ilustra um modelo (OI) no \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.2.

$$\max \quad z = 10x_1 + 6x_2 \quad (1.2.12)$$

Sujeito a:

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (1.2.13)$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5 \quad (1.2.14)$$

$$-x_1 - x_2 \leq -1 \quad (1.2.15)$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ e inteiro.} \quad (1.2.16)$$

A região factível do problema OI não é convexa, e portanto as observações anteriores para a resolução do exemplo OL não são mais válidas. Outras estratégias, em geral mais elaboradas, terão que ser utilizadas. Observe, no Exemplo 1.2, que a estratégia de arredondar a solução do problema OL nem sempre produz uma solução factível ou com valor apropriado. A solução ótima do Exemplo 1.2 é $x^{**} = (5, 0)$, com valor $z^{**} = 50$. Note que se a solução do Exemplo 1.1 for arredondada para $\bar{x} = (3, 3)$ obtemos uma solução factível para o problema OI mas com valor muito menor do que o valor da solução ótima inteira, mostrando que a estratégia de arredondamento pode não ser satisfatória. Na maioria das vezes, é difícil achar uma solução arredondada que satisfaça as restrições do problema de otimização inteira.

- Otimização inteira mista (**OIM**): Em determinadas circunstâncias interessa que apenas um subconjunto de variáveis esteja restrito a assumir valores inteiros. Neste caso, temos um modelo de otimização inteira mista (OIM), que pode ser descrito de acordo com (1.2.17)-(1.2.19)

$$\min(\text{ ou } \max) \quad z = c^T x \quad (1.2.17)$$

Sujeito a:

$$Ax \leq b \quad (1.2.18)$$

$$x \geq 0, \quad x_j \text{ inteiro}, j \in \Gamma \subset \{1, \dots, n\} \quad (1.2.19)$$

O Exemplo 1.3, adaptado do Exemplo 1.2, ilustra um modelo OIM no R^2 . A região factível do problema OIM também é não convexa e, portanto, valem as observações feitas para o caso OI. Neste exemplo a solução ótima é $x^{***} = (3\frac{1}{3}, 3)$ com valor $z^{***} = 51\frac{1}{3}$.

Exemplo 1.3.

$$\max \quad z = 10x_1 + 6x_2 \quad (1.2.20)$$

Sujeito a:

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (1.2.21)$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5 \quad (1.2.22)$$

$$-x_1 - x_2 \leq -1 \quad (1.2.23)$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_2 \text{ inteiro}. \quad (1.2.24)$$

- Otimização não linear (**ONL**): Modelos de otimização tais que a função objetivo é não linear e/ou o conjunto de restrições é formado por equações ou inequações não lineares são chamados de modelos de otimização não lineares (ONL). Situações que envolvam modelos não lineares e que não possam ser representadas por modelos lineares fogem do escopo deste texto e não serão discutidas. O leitor interessado nesta classe de modelos poderá consultar por exemplo as seguintes obras: [100], [70] e [49].

Os problemas de otimização discutidos nas próximas seções serão representados por modelos de otimização linear contínua, otimização linear inteira, ou otimização linear inteira mista. Ao tratar desses problemas, deve-se ter em mente o grau de

dificuldade associado à sua resolução. Enquanto problemas de otimização linear contínua com algumas centenas de variáveis e restrições podem ser resolvidos facilmente, a resolução de algumas classes de problemas de otimização linear inteira não possuem este comportamento. Contrastando com os problemas de otimização linear contínua, não se sabe se existem ou não algoritmos polinomiais para resolver muitas classes de problemas de otimização linear inteira. Um estudo detalhado sobre a classificação de problemas de otimização inteira quanto ao grau de dificuldade de sua solução (complexidade computacional) pode ser visto em [50] e [28].

Alguns algoritmos eficientes para a solução de problemas envolvendo variáveis inteiras são baseados em técnicas de enumeração implícita e combinam vários métodos de solução. A maioria dos algoritmos emprega a técnica de “relaxação e cálculo de limitantes” ([81]). Este tópico é apresentado com mais detalhes na Seção 1.3. De fato, uma “boa” formulação de um problema pode ser de crucial importância para a eficiência do processo de resolução. Nos Capítulos 3 e 5 apresentamos diversas formulações para um mesmo problema e discutimos como elas se relacionam.

1.3 Reformulações e limitantes

Considere um problema de otimização linear inteira (OI) de minimização. Se conhecermos um limitante inferior (LI) e um limitante superior (LS) para o valor ótimo do problema, e se a diferença ($LS - LI$) é igual a zero, ou menor que uma tolerância pré-estabelecida, podemos dizer que o valor LS é ótimo para o problema. Uma estratégia bastante utilizada para obtenção de limitantes superiores, limitantes primais, consiste em determinar uma solução factível \bar{x} e, então $LS = c^T \bar{x}$. No caso em que $LS = LI$, \bar{x} é uma solução ótima para o problema. A partir deste fato, podemos pensar em algoritmos de resolução que obtêm de forma iterativa novos limitantes inferiores e superiores para o problema. Uma questão que surge é: “Como obter novos e melhores limitantes?”.

Diversos métodos de solução heurísticos são propostos na literatura para a obtenção de bons limites primais. No Capítulo 3 discutimos alguns procedimentos. Mais informações sobre métodos heurísticos de solução para problemas de otimização podem ser obtidos em [28] e [38].

Ainda considerando o critério de minimização, o método mais usado para a obtenção de limites inferiores (limites duais) é dado pela construção de um modelo “relaxado”, isto é, um modelo mais fácil de ser resolvido e com um valor ótimo menor ou igual que o valor ótimo do problema original. Wolsey [102] define formalmente o conceito de relaxação, Definição 1.2, baseado no conceito de formulação do problema, Definição 1.1.

Definição 1.1. *Seja $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n, Ax \leq b\}$, e $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ a região factível do problema OI (modelo (1.2.9)-(1.2.11)). P é chamado de uma formulação para o conjunto X .*

Definição 1.2. *Dizemos que um problema de otimização (PR):*

$$\begin{aligned} z^R &= \min f(x) \\ x &\in T \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

é uma relaxação do problema OI se:

- i) $X \subseteq T$; e*
- ii) $f(x) \leq c^T x, \forall x \in X$.*

A Proposição 1.1 estabelece que a solução ótima de uma relaxação do problema (OI) fornece um limitante inferior (limite dual) para o valor ótimo do problema.

Proposição 1.1. *Se (PR) é uma relaxação de (OI) então $z^R \leq c^T x, \forall x \in X$.*

Prova: Se x^* é solução ótima de (OI) então $z = c^T x^*$ e de acordo com o item *ii*) da Definição 1.2:

$$z = c^T x^* \geq f(x^*); \quad (1.3.26)$$

mas, pela hipótese *i*), $x^* \in T$ e portanto:

$$f(x^*) \geq z^R. \quad (1.3.27)$$

De (1.3.26) e (1.3.27) temos que:

$$z^R \leq c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in X.$$

□

A questão de obter um bom limite dual se transforma então na questão de se obter boas relaxações para o problema. Uma relaxação fácil de ser construída, e muito usada para auxiliar na resolução de um problema (OI) é a Relaxação Linear. Reescrevendo (OI) de acordo com (1.3.28), a relaxação linear associada é dada em (1.3.29). O Exemplo 1.1 é uma relaxação linear para o problema OI exibido no Exemplo 1.2.

$$\begin{aligned} z &= \min c^T x \\ x \in X &= P \cap \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

$$\begin{aligned} z^{RL} &= \min cx \\ x &\in P. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Quando duas ou mais formulações matemáticas para um mesmo problema estão disponíveis (ver Exercício 2.4), interessa saber qual delas é melhor em termos do limite dual associado. A Proposição 1.2, a seguir, estabelece que se uma formulação P_1 é melhor que outra P_2 , então o valor da relaxação linear, z_1^{RL} , associada a um problema de otimização inteira em que P_1 define a região factível é mais forte ou igual que o valor associado a P_2 (z_2^{RL}), qualquer que seja a função objetivo (gradiente) usada na definição dos problemas ($\forall cx$).

Proposição 1.2. *Suponha que P_1 e P_2 são duas formulações para (OI) e que P_1 é uma formulação melhor do que P_2 , isto é: $P_1 \subset P_2$. Se:*

$$z_i^{RL} = \min\{cx : x \in P_i\}, \quad i = 1, 2$$

são as relaxações lineares associadas, então:

$$z_1^{RL} \geq z_2^{RL}, \forall c.$$

A relaxação de um problema também pode ser usada para estabelecer uma prova de que a solução ótima do problema foi obtida. A Proposição 1.3 formaliza esta ideia.

Proposição 1.3.

- i) Se o problema relaxado (PR) é inviável, o problema (OI) também é inviável.*
- ii) Seja x^* a solução ótima de (PR). Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = c^T x^*$ então x^* é solução ótima de (OI).*

Prova:

- i) Se (PR) é inviável $\Rightarrow T = \emptyset$ e, como $X \subseteq T$ segue que $X = \emptyset$.*
- ii) Se $x^* \in X$, $z \leq c^T x^* = f(x^*) = z^R \Rightarrow z \leq z^R$.*
- Mas, pela Proposição 1.1, $c^T x^* \geq z^R$. Portanto:

$$z = c^T x^* \text{ e } x^* \text{ é uma solução ótima de (OI) .}$$

□

Uma outra relaxação muito usada na solução de problemas de otimização com estruturas especiais é a Relaxação Lagrangiana [55], que é obtida pela exclusão de determinados subconjuntos de restrições e penalizando as restrições excluídas na função objetivo com multiplicadores de Lagrange. A escolha das restrições a serem excluídas é feita de forma que o problema resultante se torne mais fácil de ser resolvido e forneça bons limites duais. A atualização dos multiplicadores de Lagrange auxilia na busca de limites duais de melhor qualidade.

Na Seção 3.5 descreve-se resumidamente a aplicação de relaxação Lagrangiana ao problema de dimensionamento de lotes com vários itens para a obtenção de limites duais. Também é usado em um procedimento heurístico para obter uma solução factível para o problema. Aplicações da Relaxação Lagrangiana para obtenção de limites primais e duais para problemas de dimensionamento de lotes podem ser encontradas em [11], [60], [96], [44], [45] e [15].

Relaxações lineares de boas formulações fornecem bons limites duais. A maioria dos sistemas computacionais, comerciais e não comerciais disponíveis inclui procedimentos para a obtenção de limites primais e duais. Estes limites são usados em métodos de enumeração implícita para a resolução dos problemas de otimização inteira e inteira mista. É interessante observar também que, os limites duais melhores são obtidos pela reformulação automática do problema obtida pela inclusão de inequações válidas, Definição 1.3.

Definição 1.3. *Dizemos que uma inequação $\pi x \leq \pi_0$ é válida para um conjunto X se todos os pontos do conjunto satisfazem a inequação, isto é: $\pi x \leq \pi_0, \quad \forall x \in X$.*

Mais informações sobre o uso de inequações válidas para a obtenção de bons limites duais podem ser vistas em [102]. Na Seção 1.4 fazemos uma rápida descrição de sistemas computacionais para a modelagem e solução de problemas de otimização linear contínua e inteira.

1.4 Sistemas computacionais de modelagem e de resolução

Diversas ferramentas computacionais de caráter geral e específico podem auxiliar no processo de construção, manutenção e resolução de modelos de otimização. Podemos dividir a discussão deste tópico em dois blocos: ferramentas de modelagem e ferramentas de resolução. No primeiro bloco estão as linguagens de programação

(ex. C, C++, Fortran), as planilhas de cálculo (ex. EXCEL, Lotus 123) e as Linguagens Algébricas de Modelagem (LAM). No bloco das ferramentas de resolução entram novamente as linguagens de programação, usadas para a implementação de algoritmos e os sistemas de resolução comerciais e de pesquisa. Em [65] a planilha de cálculo EXCEL é usada para modelar e resolver problemas. A seguir faremos uma breve discussão sobre linguagens algébricas de modelagens e sistemas de resolução. Mais detalhes podem ser obtidos em [91] e nas referências citadas.

Linguagens algébricas de modelagem

Em geral, estamos interessados em usar um determinado modelo matemático para simular diversas possibilidades ou cenários antes de tomar uma decisão. Neste ponto é conveniente distinguir formalmente entre um modelo matemático e um exemplar (ou instância) do mesmo.

Um modelo é uma representação algébrica abstrata de um problema e um exemplar é a descrição explícita ou uma atribuição de valores para os dados abstratos do modelo. Considerando o Exemplo 1.2, ao definirmos:

$$n = 2, m = 3, c^T = (10, 6), A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 45 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

obtemos um exemplar do modelo OI definido em (1.2.9)-(1.2.11). Portanto, quando dizemos que queremos resolver um modelo de otimização estamos nos referindo a resolução de um exemplar do mesmo. Neste texto usaremos os termos exemplar e instância como sinônimos.

O objetivo inicial para o desenvolvimento das linguagens algébricas de modelagem foi o de facilitar o processo de comunicação de dados entre o usuário e os sistemas de resolução. A evolução das linguagens ampliaram estes objetivos e podemos dizer que o seu uso facilita a construção e a documentação de um modelo de otimização e serve de *interface* com sistemas de resolução, não apenas para fornecer dados e receber a solução do exemplar resolvido, mas também para interagir do ponto de vista algorítmico com o sistema.

Existem disponíveis hoje uma grande variedade de linguagens de modelagem com diferentes habilidades (ex. [48], [94], [76]). Entre as linguagens procedurais podemos citar AMPL [47] e XPRESS-MOSEL [82]. Essas duas linguagens exigem a compra de licenças para uso comercial. No entanto, para uso acadêmico as licenças estão disponíveis gratuitamente para *download* (a linguagem AMPL está disponível em versões restritas), o que permite que você leitor, possa utilizá-las para construir seus próprios modelos. Duas linguagens de modelagem não-comerciais (ZIMPL e GMPL) disponíveis na internet [68] possuem sintaxe similar à linguagem AMPL. Um exemplo de modelagem matemática utilizando AMPL é apresentado no Capítulo 3.

Sistemas de resolução

Para validar um modelo de otimização é necessário analisar se a solução obtida fornece uma resposta adequada. Existem diversos sistemas computacionais comerciais e de pesquisa desenvolvidos para resolver problemas de otimização linear e não linear. Uma revisão sobre sistemas não-comerciais pode ser encontrada em [68], e sistemas comerciais em [17] e [93].

Os sistemas comerciais, IBM-Cplex [59], Fico-Xpress [82] e Gurobi [56] tem sido muito utilizados na literatura para a resolução de problemas de otimização inteira e inteira mista, e as soluções dos problemas obtidas por eles, assim como o tempo computacional, servem como padrão de comparação para soluções obtidas por métodos alternativos. Esses sistemas contêm implementações dos principais algoritmos de solução para problemas de otimização linear contínua: método simplex revisado (ex. [51], [19] e [16]) e métodos de pontos interiores (ex. [53]); e problemas de otimização linear inteira e inteira mista: planos de corte, *branch and bound* e *branch and cut* (ex. [16], [102], [90] e [51]). Apesar de apresentarem desempenhos distintos, possuem recursos que permitem ajustar o desempenho dos algoritmos de acordo com o tipo do problema. Estes três sistemas estão disponíveis gratuitamente para fins acadêmicos e podem ser acoplados às linguagens de modelagem.

Uma vez concluído o processo de validação de um modelo de otimização, é possível testar as diversas alternativas que os sistemas disponibilizam para determinar o conjunto de procedimentos que melhor se comportam na resolução do problema. Esta sugestão é particularmente útil quando o modelo de otimização inclui variáveis inteiras ou binárias. Além disso, quando o modelo construído possui uma estrutura especial (ex. problema do transporte, da designação, de dimensionamento de lotes, da mochila, do caixeiro viajante, de sequenciamento de tarefas) é recomendável desenvolver e implementar algoritmos que explorem esta estrutura. Nestes casos a solução fornecida pelos modelos de otimização servem de parâmetro para avaliar a qualidade das soluções obtidas por outros métodos.

1.5 Exercícios

Exercício 1.1. *Represente graficamente no \mathbb{R}^2 a região factível dos problemas de otimização descritos nos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 e analise as conclusões presentes no texto.*

Exercício 1.2. *Crie outros exemplos com duas variáveis, represente graficamente a região factível, determine a solução ótima e limites primais e duais.*

Exercício 1.3. [102] *Seja: $X = \{(0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (0110), (0101), (0011)\}$. Considere as seguintes formulações para o conjunto X :*

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 93x_1 + 49x_2 + 37x_3 + 29x_4 \leq 111; 0 \leq x_j \leq 1, j = 1 \dots 4\}$$

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2; 0 \leq x_j \leq 1, j = 1 \dots 4\}$$

$$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2; x_1 + x_2 \leq 1; x_1 + x_3 \leq 1; x_1 + x_4 \leq 1; 0 \leq x_j \leq 1, j = 1 \dots 4\}.$$

Encontre relaxações lineares para os problemas de otimização inteira associados a $P_i, i = 1, 2, 3$: $Z_i = \max\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 : x \in X = P_i \cap \mathbb{Z}^4\}$, e verifique qual é a melhor formulação para o conjunto X .

Capítulo 2

Problemas clássicos de logística

Neste capítulo são apresentadas definições e formulações matemáticas de alguns problemas clássicos de otimização combinatória relacionados a logística que significa, de acordo com o *Council of Supply Chain Management Professionals*, “Logística é a parte do Gerenciamento da Cadeia de Abastecimento que planeja, implementa e controla o fluxo e armazenamento eficiente e econômico de matérias-primas, materiais semi-acabados e produtos acabados, bem como as informações a eles relativas, desde o ponto de origem até o ponto de consumo, com o propósito de atender às exigências dos clientes” ([29] p. 31). Esta classe de problemas é frequentemente modelada usando conceitos de Teoria dos Grafos e resolvida por algoritmos que exploram sua estrutura combinatória (ex. [51]). A formulação matemática dos problemas discutidos neste capítulo usando modelos de otimização inteira ou inteira mista é útil por várias razões. Nos próximos capítulos usaremos esses modelos clássicos para obter formulações alternativas para o problema de dimensionamento de lotes (Capítulo 3), e para modelar decisões associadas ao sequenciamento de lotes no Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento da Produção (Capítulo 5).

Na descrição destes problemas são necessários conceitos de Teoria dos Grafos resumidos a seguir. Um tratamento completo da Teoria dos Grafos pode ser obtido, por exemplo em [26].

Definição 2.1. *Grafo/Digrafo* - Um grafo é constituído por um conjunto V não vazio de objetos, chamados vértices (ou nós) e um conjunto A de pares não ordenados de elementos de V , chamados arestas. Denota-se um grafo por $G(V, A)$, ou simplesmente G . Se o conjunto de arestas é formado por pares ordenados de elementos de V temos um grafo orientado ou digrafo.

Definição 2.2. *Adjacência de vértices*- Dois vértices que são ligados por uma aresta são chamados vértices adjacentes.

Definição 2.3. *Adjacência de arestas*- Duas arestas com um vértice em comum são chamadas arestas adjacentes.

Definição 2.4. *Grafo valorado*- Um grafo G é dito valorado se existe um valor (número real) associado a cada vértice e/ou aresta do grafo. Um digrafo valorado é chamado de rede.

Definição 2.5. *Caminho-* Um caminho é uma sequência alternada de vértices e arestas onde não há repetição de vértices e começa e termina com vértices. Em digrafos a orientação das arestas deve coincidir.

Definição 2.6. *Circuito-* Um circuito é uma sequência alternada de vértices e arestas onde não há repetição de vértices, exceto pelo primeiro. Em digrafos a orientação das arestas deve coincidir.

Definição 2.7. *Circuito Hamiltoniano-* Um circuito que inclui todos os vértices de um grafo é chamado de circuito hamiltoniano.

Definição 2.8. *Custo de um caminho-* Num grafo valorado, o custo de um caminho (ou de um circuito) é igual à soma dos valores das arestas incluídas.

2.1 O problema do caminho mínimo (PCM)

Todos os dias ao sair de casa, nos deparamos com uma importante questão: “Como chegar ao nosso destino?” Esta é uma questão muito geral, e envolve vários aspectos a serem considerados para se obter uma resposta satisfatória: o meio de transporte a ser usado, o tempo disponível, o custo e a rota. Nesta seção, o que nos interessa é a definição da rota. Se optamos pelo transporte público, a rota já foi previamente definida por pessoas responsáveis pelo gerenciamento do serviço. Se optarmos pela caminhada ou pelo uso de um transporte particular, somos nós os responsáveis por defini-la. É importante observar que, no caso do uso do transporte público, os responsáveis também se depararam com o problema de definir, entre as várias alternativas para se chegar ao destino desejado, qual é a melhor.

Consideramos o mapa da região central da cidade de São José do Rio Preto no estado de São Paulo exibido na Figura 2.1. Supomos que queremos ir da rodoviária (ponto A) e desejamos seguir de carro até o Complexo Swift de Educação e Cultura (ponto B). A ferramenta *GoogleMaps* sugere uma opção de rota dada na Figura 2.1. No entanto, analisando a Figura 2.1 verificamos que existem varias rotas alternativas. Naturalmente precisamos de um critério para escolher a melhor delas. Um critério muito usado é encontrar a rota de menor distância, mas outros critérios podem ser usado tais como: tempo de percurso, índice de congestionamento, custo, ou ainda um valor calculado considerando todos estes critérios. Um enunciado geral para o problema de encontra melhor rota pode ser feito de acordo com o Problema 2.1.

Problema 2.1. *Problema do Caminho Mínimo (PCM) - Uma pessoa deseja sair de sua casa e chegar ao trabalho no menor tempo possível. Qual é a sequência de ruas e avenidas que a pessoa deve percorrer para chegar ao seu destino final?*

O problema do caminho mínimo é um problema clássico de otimização combinatoria e pode ser representado através de uma rede (ver Definição 2.4) $G(V, A)$ em que o conjunto de vértices, V , representa as esquinas entre trechos de ruas e avenidas (o ponto de partida e o ponto de chegada devem estar presentes em V), e o conjunto de arestas, A , representa trechos de ruas e avenidas. O valor atribuído a uma aresta pode ser igual ao tempo de percurso de ir de uma esquina a outra (vértices). Em termos de teoria dos grafos, encontrar a solução ótima para este problema consiste em determinar um caminho com o menor valor total possível. Este caminho representa uma sequência de trechos de ruas ou avenidas a serem percorridas entre o ponto de origem e o ponto de destino final. O valor de cada

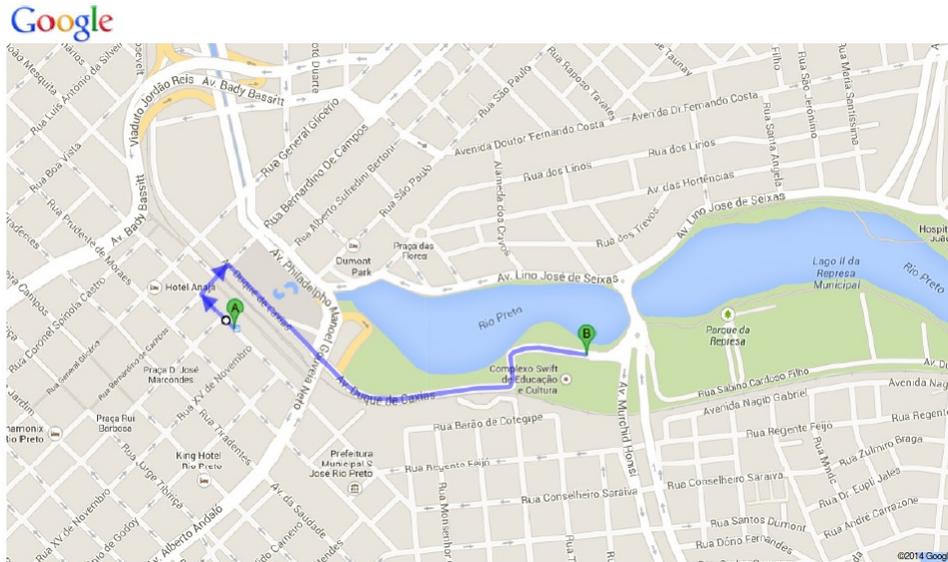


Figura 2.1: Trecho da região central de São José do Rio Preto-SP.

aresta no caso do Problema 2.1 é o tempo do percurso entre os dois pontos do mapa representados, mas outros valores tais como custo ou distância também podem ser usados.

Naturalmente, o tamanho do problema depende de quantos trechos de ruas e avenidas serão considerados na definição do problema. Isto é, do número de vértices e arestas do grafo associado. O problema do Caminho Mínimo é considerado um problema bem resolvido já que existem diversos algoritmos eficientes para solucioná-lo. O mais conhecido é o algoritmo de Dijkstra proposto em 1957 (ex. [26]). O desafio hoje é a dimensão do problema, e a forma dinâmica como deve ser tratado. Ao usarmos a ferramenta amplamente disponível na internet *Google Maps* podemos quase que instantaneamente definir dois pontos em um mapa de uma cidade e obter um caminho. A ferramenta em geral mostra o caminho com menor distância. Mas, quantos vértices e arestas devem ser considerados na resolução do problema de caminho mínimo entre dois locais, por exemplo, na cidade de São Paulo? Alguns estudos sobre problemas de grande porte considerando de forma dinâmica os valores das arestas e vários critérios simultaneamente podem ser vistos em [27] e [22] respectivamente. O problema considerando incertezas nos dados é discutido em [58].

O problema do caminho mínimo também pode ser considerado na reformulação matemática de outros problemas de otimização, como por exemplo o problema de corte de estoque ([30]) ou o problema de dimensionamento de lotes (ver Seção 3.4.1). Formular um modelo de otimização do problema do caminho mínimo é útil não apenas para construir estas reformulações, mas também para resolver o problema considerando restrições adicionais.

O modelo de otimização linear binária para representar o problema do caminho mínimo é construído considerando conhecidos o número de vértices, $|V| = n$, o número de arestas, $|A| = m$, o valor de cada aresta da rede associada. Sem perda de generalidade, supomos que o vértice inicial do caminho, vértice *origem* é o vértice

1, e o vértice final do caminho, vértice *destino*, é o vértice n . Na definição do modelo consideramos os índices e variáveis definidos a seguir.

Índice

$i, j = 1, \dots, n$ para representar os vértices.

Usamos uma variável binária para definir se a aresta (i, j) está incluída no caminho ou não. Isto é, para cada $(i, j) \in A$:

Variável de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ pertence ao caminho;} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

O critério para a tomada de decisões está claramente definido, obter o caminho de menor valor total. Seja c_{ij} o valor da aresta (i, j) . A função objetivo pode então ser definida de acordo com (2.1.1).

Função Objetivo

$$\min z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}. \quad (2.1.1)$$

As restrições a serem incluídas no modelo devem garantir que o vértice 1 seja o vértice inicial do caminho e que seja incluído exatamente uma vez na sequência de vértices e arestas que definem o caminho. É necessário lembrar que, por definição, cada vértice aparece no máximo uma vez no caminho. Dada uma aresta $(i, j) \in A$, dizemos que a aresta diverge do vértice i e converge para o vértice j . Sejam $S(i)$ a lista de vértices que divergem do vértice i (vértices sucessores) e $P(i)$ a lista de vértices que convergem para o vértice i (vértices predecessores), isto é:

$$S(i) = \{j \in V : (i, j) \in A\}; \quad (2.1.2)$$

$$P(i) = \{j \in V : (j, i) \in A\}. \quad (2.1.3)$$

Para garantir que o vértice 1 seja o vértice inicial do caminho e que este seja incluído apenas uma vez, podemos ter no máximo uma aresta divergente do vértice 1 no caminho. Isto é, considerando todas as arestas divergentes do vértice inicial temos que: $x_{1,j_1} = 1$ ou $x_{1,j_2} = 1, \dots, x_{1,j_k} = 1, j_k \in S(1)$. Esta condição é modelada usando (2.1.4).

$$\sum_{j \in S(1)} x_{1j} = 1. \quad (2.1.4)$$

De forma similar, garantimos com (2.1.5) que o vértice n é o vértice final do caminho e que seja incluído apenas uma vez.

$$\sum_{j \in P(n)} x_{jn} = 1. \quad (2.1.5)$$

Caso não haja uma aresta entre os vértices 1 e n , ou caso a melhor alternativa não inclua a aresta $(1, n)$, $x_{1n} = 0$, como garantir que outros vértices sejam incluídos no caminho e apenas uma vez? As restrições (2.1.4) e (2.1.5) garantem que $x_{1j} = 1$ e $x_{kn} = 1$, para algum $j \in S(1), k \in P(n)$. Isto é, existe pelo menos mais um vértice no caminho, o vértice $j, j \neq n$ (ou $k, k \neq 1$). Neste caso, é necessário garantir, que sejam incluídas no caminho uma aresta que converge para o vértice j e uma que diverge dele. Assim garantimos que saindo do vértice 1 alcancemos o vértice n . A restrição (2.1.6), chamada de restrição de transbordo ou de balanço, garante que, se o vértice j é incluído no caminho, exatamente duas novas arestas serão incluídas também, a aresta (i, j) para algum $i \in P(j)$ e a aresta (j, k) para algum $k \in S(j)$. Note que as restrições continuam valendo se o vértice j não for incluído.

$$\sum_{i \in P(j)} x_{ij} = \sum_{k \in S(j)} x_{jk}. \quad (2.1.6)$$

A restrição (2.1.6) deve ser incluída no modelo para todos os vértices do grafo, exceto, naturalmente os vertices 1 e n . O modelo de otimização completo para representar o problema do caminho mínimo é exibido em (2.1.7)-(2.1.11).

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j \in S(i)} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1.7)$$

sujeito a

$$\sum_{i \in S(1)} x_{1i} = 1 \quad (2.1.8)$$

$$\sum_{i \in P(n)} x_{in} = 1 \quad (2.1.9)$$

$$\sum_{i \in P(j)} x_{ij} - \sum_{k \in S(j)} x_{jk} = 0; \quad j = 2 \dots n-1 \quad (2.1.10)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i \in V, j \in S(i). \quad (2.1.11)$$

A variável x_{ij} é definida em (2.1.11) como uma variável contínua, mas na solução do problema só interessam valores 0 ou 1. A matriz de restrição da formulação (2.1.7)-(2.1.11) é totalmente unimodular e esta propriedade garante que qualquer solução factível para este problema é binária. Mais detalhes sobre matrizes totalmente unimodulares, suas propriedades e consequências para os problemas de otimização combinatória podem ser vistos, por exemplo no Capítulo 3 de [102].

2.2 O problema do caixeiro viajante (PCV)

No século XVII um importante matemático Irlandês, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), inventou um jogo [101]. Basicamente o jogo consiste em encontrar um roteiro de viagem que, partindo de Londres, incluísse as 19 cidades mais importantes do mundo naquela época, e retornasse ao ponto de partida. Um reprodução do tabuleiro usado no jogo é exibida na Figura 2.2. Este jogo ficou encalhado nas prateleiras, mas o problema matemático associado desafiou e continua a desafiar pesquisadores do mundo inteiro. Um enunciado geral para o problema de encontrar o melhor roteiro pode ser feito de acordo com o Problema 2.2.

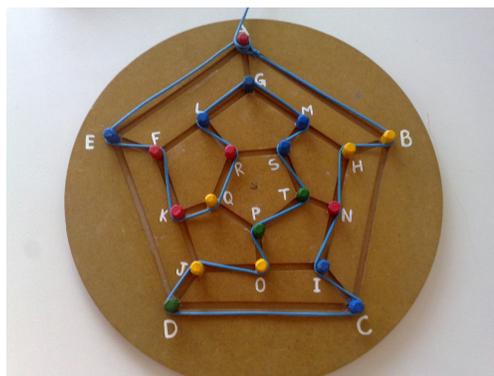


Figura 2.2: Reprodução do tabuleiro usado no jogo de Hamilton [88]

Problema 2.2. *Problema do Caixeiro Viajante (PCV) - Um viajante necessita visitar um certo número de cidades durante uma viagem e retornar ao lugar de origem de tal maneira que cada cidade seja visitada exatamente uma vez, e que a distância total percorrida seja a menor possível. Supondo conhecidas as distâncias entre cada par de cidades, que roteiro deve ser escolhido?*

O Problema 2.2 possui diversas aplicações no nosso dia-a-dia. É muito comum que empresas de diversos setores, por exemplo de bebidas, se deparem com a necessidade de determinarem o melhor roteiro para a entrega da mercadoria em pontos de revenda (bares, armazéns, supermercados). Naturalmente, é mais econômico um roteiro que inclua cada ponto de revenda uma única vez. A coleta de leite em sítios e fazendas é um outro exemplo em que é desejável encontrar um roteiro que saia da fábrica de laticínios, passe em cada ponto de coleta apenas uma vez e retorne ao ponto de partida. Mas, não é apenas no setor de distribuição que temos exemplos de aplicação deste importante problema de Otimização Combinatória. Aplicações mais sutis podem ser encontradas na indústria de manufatura em que a sequência em que um determinado conjunto de tarefas é realizada pode contribuir para diminuir os custos de produção (ver Capítulo 4). Indo um pouco mais além, podemos encontrar exemplos na biologia computacional, em que definir um circuito Hamiltoniano (ver Definição 2.7) está associado ao problema de sequenciamento do DNA [52].

Formulações matemáticas para o PCV

O PCV pode ser representado por uma rede (ver definição 2.4) $G(V, A)$ tal que o conjunto de vértices V representa as cidades a serem incluídas no roteiro, e o conjunto de arestas A representa a possibilidade de se viajar de uma cidade a outra. O valor atribuído a uma aresta é igual ao custo da viagem entre as cidades (vértices) que a definem. Em termos de Teoria dos Grafos, encontrar a solução ótima para o PCV consiste em determinar o circuito Hamiltoniano de menor custo no grafo.

Para definir um modelo matemático que represente o PCV consideramos conhecidos o número de cidades, representado por $|V| = n$ e o custo da viagem entre cada par de cidades. Para garantir que o grafo associado ao problema seja Hamiltoniano, supomos que é possível fazer a viagem de ida e volta entre todos os pares de cidades, isto é, que temos um grafo simétrico completo ($|A| = n(n - 1)$). Vamos supor também que o custo da viagem de ida é diferente do custo da volta para pelo

menos um par de cidades, esta condição caracteriza o problema do caixeiro viajante assimétrico (PCVA). Caso exista um par de cidades em que a viagem de ida, ou de volta, não seja possível, atribui-se à aresta associada um valor muito alto. Se na solução ótima do problema, estas arestas fizerem parte da solução, então o problema é infactível.

Na definição do modelo vamos considerar:

Índices

$i, j = 1, \dots, n$ para representar as cidades .

Usamos uma variável binária para definir se a cidade i precede ou não a cidade j na solução. Isto é:

Variável de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a cidade } i \text{ é visitada antes da cidade } j \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

A variável x_{ii} não tem nenhum significado nesta aplicação, portanto só há variáveis quando $i \neq j$. O critério para a tomada de decisões está claramente definido, obter o circuito Hamiltoniano de menor custo. Seja c_{ij} o custo da viagem entre a cidade i e a cidade j . A função objetivo pode então ser definida de acordo com (2.2.12).

Função Objetivo

$$\min z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (2.2.12)$$

A restrição principal é que cada cidade deve ser incluída exatamente uma vez no circuito. Consideramos, por exemplo, a cidade 2. Podemos chegar até ela vindo de qualquer uma das outras $n-1$ cidades. Se, por exemplo, $x_{12} = 1$, incluímos a cidade 2 imediatamente após a cidade 1 no circuito. Como cada cidade só pode aparecer uma vez, as demais variáveis que representam a chegada à cidade 2, $x_{i2}, i = 3, \dots, n$, devem assumir valor zero. Como as variáveis de decisão são binárias, esta situação ($x_{12} = 1$ ou $x_{32} = 1$ ou \dots $x_{n2} = 1$) pode ser representada pela equação (2.2.13).

$$x_{12} + x_{32} + \dots + x_{n2} = 1. \quad (2.2.13)$$

De acordo com (2.2.13), exatamente uma das variáveis x_{i2} ($i = 1 \dots n, i \neq 2$) terá valor igual a 1, garantindo assim a chegada à cidade 2 apenas uma vez. Naturalmente, saindo da cidade 2 queremos ir até uma das outras $(n - 1)$ cidades. Da mesma forma que chegamos na cidade 2 apenas uma vez, iremos partir de lá uma única vez. Usando um raciocínio similar, temos que a equação (2.2.14) garante que sairemos da cidade 2 uma única vez.

$$x_{21} + x_{23} + \dots + x_{2n} = 1. \quad (2.2.14)$$

Usando esta mesma idéia considerando as demais cidades obtemos o conjunto de restrições (2.2.15) e (2.2.16) que garantem que cada cidade é visitada apenas uma vez.

Restrições

Saída da cidade i :

$$x_{i1} + \dots + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + \dots + x_{in} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.15)$$

Chegada à cidade j :

$$x_{1j} + \dots + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + \dots + x_{nj} = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2.16)$$

O modelo matemático para representar o PCV ainda não está pronto! Observe que, considerando um caso particular com $n = 6$ cidades, a solução:

$$x_{13} = x_{35} = x_{51} = x_{26} = x_{64} = x_{42} = 1; \quad (2.2.17)$$

e todas as demais variáveis iguais a zero,

satisfaz o conjunto de restrições (2.2.15) e (2.2.16). No entanto, esta atribuição de valores para as variáveis não fornece uma solução factível para o problema porque o conjunto de arestas incluídos nesta solução não formam um circuito hamiltoniano. Todas as seis cidades estão incluídas na solução exatamente uma vez, no entanto esta solução forma dois circuitos, o circuito $\{1, 3, 5, 1\}$ e o circuito $\{2, 6, 4, 2\}$. Estes dois circuitos são chamados de subrotas e para termos um modelo correto para o PCV, temos que incluir restrições que impeçam este tipo de solução. Isto é, falta acrescentar no modelo matemático restrições para a eliminação de subrotas.

Existem na literatura diversas propostas de restrições para a eliminação de subrotas. Uma revisão comparativa de modelos para o PCV, com foco na qualidade da formulação obtida e a forma como as restrições para eliminação de subrotas são modeladas, pode ser encontrada em [79]. Apresentamos a seguir duas formulações clássicas para o PCV.

Formulação de Miller, Tucker e Zemlin - MTZ

A formulação proposta em 1960 por Miller, Tucker e Zemlin (vide e.g. [66] e [51]) resulta em um modelo de otimização inteira mista. Considere um novo conjunto de variáveis contínuas, isto é:

Novas Variáveis

$$u_j, j = 2 \dots n.$$

O conjunto de restrições (2.2.18) elimina a possibilidade de subrotas.

Novas Restrições

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq (n - 1), \quad i, j = 2 \dots n; i \neq j. \quad (2.2.18)$$

A demonstração de que este conjunto de restrições é suficiente para eliminar as subrotas pode ser visto em [66] e [89]. Se a variável u_j tiver limite superior igual a $|V| = n$, o valor atribuído na solução do modelo representa a posição da cidade j no circuito. O modelo completo para representar o PCV, formulação PCV-MTZ, é exibido em (2.2.19)-(2.2.24).

$$\min z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.2.19)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1 \dots n \quad (2.2.20)$$

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots n \quad (2.2.21)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 2 \dots n; i \neq j \quad (2.2.22)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1 \dots n, i \neq j \quad (2.2.23)$$

$$0 \leq u_i \leq n, \quad i = 2 \dots n. \quad (2.2.24)$$

A formulação PCV-MTZ possui $(n-1)^2$ restrições para eliminação de subrotas (restrições (2.2.22)) e é uma formulação bastante compacta. Esta formulação pode ser usada para representar situações em que a cidade de origem pode ser visitada diversas vezes e nenhuma subrota pode conter mais do que um determinado número de cidades [51] (ver Exercício 2.5). Uma formulação contendo um número exponencial de restrições, porém com uma relaxação linear melhor do que a associada à formulação PCV-MTZ é apresentada a seguir.

Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson - DFJ

Considerando que um circuito em um grafo possui n arestas, Dantzig, Fulkerson e Johnson (1954)(vide ex. [66] e [51]) propuseram um conjunto de restrições para a eliminação de subrotas que impedem que circuitos com um número de arestas menor do que n sejam formados. Considere por exemplo, uma instância do PCV com $n = 6$ cidades, e um subconjunto de vértices $S = \{2, 6, 4\} \subset V$. Um circuito contendo estes três vértices possui três arestas e portanto forma uma subrota. Se impormos a condição que no máximo duas arestas de um circuito formado por estes três vértices estejam presentes em uma solução do problema, impedimos que este subconjunto de vértices formem uma subrota. A restrição (2.2.25) (conhecida como restrição de circuito) impõe esta condição considerando o circuito $\{2, 6, 4, 2\}$.

$$x_{26} + x_{64} + x_{42} \leq 2. \quad (2.2.25)$$

Note que a solução (2.2.17) não satisfaz a restrição (2.2.25). É claro que apenas a inclusão desta restrição não impede que outras subrotas sejam formadas, por exemplo a subrota $\{1, 5, 2, 1\}$ ou a subrota $\{4, 6, 2, 4\}$. Assim, para eliminar todas as subrotas, temos que considerar a eliminação de todos os circuitos com menos de n vértices.

A inequação 2.2.26, conhecida como inequação do tipo clique, é obtida a partir de um procedimento de *lifting* aplicado à restrição de circuito e considera todos os subconjuntos S de vértices tais que $|S| < n$ ([54]). Assim, as inequações (2.2.26) eliminam subrotas mas não eliminam circuitos Hamiltonianos e portanto são válidas para o PCV.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subset \{1 \dots n\} \quad (2.2.26)$$

A formulação PCV-DFJ é dado pelo modelo (2.2.27)-(2.2.31).

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.2.27)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1 \dots n \quad (2.2.28)$$

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots n \quad (2.2.29)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{1 \dots n\} \quad (2.2.30)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad i, j = 1 \dots n, i \neq j. \quad (2.2.31)$$

A formulação PCV-DFJ possui $(2^n - 2)$ restrições para eliminação de subrotas (restrições (2.2.30)) e $2n$ restrições de designação ((restrições (2.2.28) e (2.2.29)). Este número de restrições cresce exponencialmente quando o valor de n cresce. Uma maneira de resolver instâncias desta formulação é gerar as inequações (2.2.30) a medida que são necessárias. Inicialmente resolve-se a relaxação da formulação PCV-DFJ obtida eliminando-se as restrições (2.2.30) e as restrições de integralidade. A solução do problema de designação resultante é analisada para ver se forma um circuito Hamiltoniano. Caso forme, esta é a solução ótima do problema. Senão uma restrição de eliminação de subrota não satisfeita pela solução atual é incluída e o novo problema é resolvido. Esta técnica aplicada iterativamente e combinada com método *branch and bound* (método conhecido hoje como *branch and cut*, ver Seção 1.4), foi proposta em 1954 por Dantzig, Fulkerson e Johnson para resolver com sucesso um problema com 49 cidades. Mais recentemente, Padberg e Rinaldi [83] usaram esta técnica combinada com métodos de pré-processamento e outras classes de inequações para resolver exemplares com até 2392 cidades. Em um artigo publicado em 2003, Applegate et al. [7] relatam a solução de exemplares com um milhão de cidades ou mais. Uma excelente e divertida jornada sobre as origens e a história, bem como métodos de solução para o PCV que permitem a resolução de instâncias de grande porte do problema são apresentadas por Cook em [32].

2.3 O problema de localização de facilidades (PLF)

Uma questão presente em uma grande variedade de situações, tanto na vida individual quanto coletiva, seja nos setores público ou privado, diz respeito à localização: “Onde deve ser instalada uma determinada facilidade?” [67]. A palavra “facilidade” é usada aqui para designar, entre outras, fábricas, depósitos, escolas, hospitais. Analisando esta pergunta, obtém-se a definição básica dos problemas de localização de facilidades que tratam exatamente das decisões sobre onde localizar (instalar) as facilidades considerando que uma certa demanda deve ser atendida e de acordo com algum critério específico ([33, 69]. O problema pode ser enunciado de acordo com o Problema 2.3.

Problema 2.3. *Problema de Localização de Facilidades (PLF) - Dado um conjunto de facilidades e um conjunto de locais onde estas facilidades podem ser instaladas, deseja-se determinar os locais de instalação de facilidades, de forma a atender uma*

demanda pré-especificada e com o menor custo total. Se uma facilidade for instalada, existe um custo fixo a ser pago, e um custo variável que depende da demanda de cada cliente que é atendida por determinada facilidade.

O problema de localização de facilidades e suas variantes (ex. problema das p -medianas, problema de localização não capacitado) possuem diversas aplicações práticas. Entre elas destacamos [33]: localização de centrais de chaveamento em redes telefônicas; subestações em redes de energia elétrica; depósitos em redes de distribuição; postos de triage (seleção) de correspondência dos Correios; bibliotecas; delegacias; escolas. Entre essas aplicações, gostaríamos de destacar o trabalho sobre localização de escolas públicas na cidade de Vitória-ES [85] que, em 2004, foi classificado em terceiro lugar na competição internacional *OR For Development Prize Competition* promovido pela *IFORS-International Federation Of Operational Research Societies*.

A solução do Problema 2.3 consiste em definir em quais lugares as facilidades serão instaladas e determinar a demanda de cada cliente a ser atendida a partir de cada facilidade, minimizando-se o custo total de instalação das facilidades e de atendimento das demandas [80]. Para formular matematicamente este problema, supomos que existe um conjunto de m clientes e um conjunto de n lugares em potencial para a instalação das facilidades, e consideramos o conjunto de índices a seguir.

Índices

$i = 1, \dots, n$ para representar os locais onde as facilidades podem ser instaladas.

$j = 1, \dots, m$ para representar os clientes.

Supomos também que os seguintes parâmetros são conhecidos:

Parâmetros

f_i : custo fixo de instalação de uma facilidade no local i ;

C_i : capacidade da facilidade instalada no local i ;

d_j : demanda do cliente j ;

c_{ij} : custo de atender ao cliente j a partir de uma facilidade instalada no local i .

Precisamos de dois conjuntos de variáveis binárias. O primeiro conjunto para definir se a facilidade será instalada ou não. O segundo conjunto para definir se a demanda do cliente j será atendida ou não pela facilidade localizada em i . Temos então:

Variáveis de decisão

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se a facilidade localizada em } i \text{ é instalada;} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } j \text{ é atendido pela facilidade localizada em } i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O critério de otimização é minimizar o custo total de instalação das facilidades e atendimento da demanda dos clientes. O custo total de instalação é dado em (2.3.32) e o custo total de atendimento da demanda dos clientes dado em (2.3.33). A função objetivo é então a minimização da soma destes dois custos e apresentada em (2.3.34).

Custo total de instalação das facilidades

$$\sum_{i=1}^n f_i y_i. \quad (2.3.32)$$

Custo total de atendimento da demanda

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (2.3.33)$$

Função Objetivo

$$\min z = \sum_{i=1}^n f_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (2.3.34)$$

Precisamos garantir que cada cliente seja atendido por exatamente uma facilidade. A expressão (2.3.35) garante esta restrição.

Restrição 1 - Atendimento da demanda

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots m. \quad (2.3.35)$$

É importante observar no entanto, que um cliente j só pode ser atendido pela localidade i se uma facilidade for instalada em i , isto é: $x_{ij} > 0 \Rightarrow y_i = 1$. Temos aqui uma condição chamada de disjuntiva, ($y_i = 1$ e $x_{ij} > 0$) ou ($y_i = 0$ e $x_{ij} = 0$). A expressão (2.3.36) modela esta situação. O parâmetro M pode ser definido como um valor suficientemente grande para garantir que a facilidade possa atender todos os clientes, até o limite de sua capacidade. Na Seção 3.2 é feita uma discussão, no contexto do problema de dimensionamento de lotes, sobre a importância de escolhas adequadas para o valor de M de forma a melhorar a qualidade dos limitantes obtidos pela relaxação linear do modelo.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq M y_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.3.36)$$

É necessário também considerar a capacidade de cada facilidade. A expressão (2.3.36) modificada para (2.3.37) garante esta condição.

Restrição 2 - Capacidade

$$\sum_{j=1}^m d_j x_{ij} \leq C_i y_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.3.37)$$

O modelo (2.3.38)-(2.3.41) representa o problema de Localização de Facilidades Capacitado, é dito ser uma formulação agregada.

$$\min z = \sum_{i=1}^n f_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (2.3.38)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots m \quad (2.3.39)$$

$$\sum_{j=1}^m d_j x_{ij} \leq C_i y_i, \quad i = 1 \dots n \quad (2.3.40)$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad i, j = 1 \dots n. \quad (2.3.41)$$

Para formular o problema em que não se tem limite de capacidade, pode-se substituir (2.3.40) pela restrição (2.3.42).

Restrição desagregada

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m. \quad (2.3.42)$$

O modelo matemático para o problema de localização de facilidades também pode ser usado para a reformulação de outras classes de problemas, na Seção 3.4.2 explora-se este fato para o problema de dimensionamento de lotes .

2.4 Exercícios

Exercício 2.1. *Represente a situação descrita no início da Seção 2.1 (Mapa de São José do Rio Preto) usando um grafo e atribuindo valores para os custos das arestas. Escreva a situação representada de acordo com o modelo de otimização apresentado na Seção 2.1.*

Exercício 2.2. *Analise com um exemplo as diferenças entre os problemas do caminho mínimo e do caixeiro viajante. Observe as consequências dessas diferenças nos modelos matemáticos apresentados neste capítulo para os dois problemas.*

Exercício 2.3. *Considere a versão do jogo de Hamilton exibida na Figura 2.3. Calcule o custo do circuito hamiltoniano exibido na Figura 2.2. Verifique se é possível obter roteiros melhores.*

Exercício 2.4. *Analise com um exemplo as diferenças entre os dois modelos matemáticos apresentados neste capítulo para o problema do caixeiro viajante ((2.2.19) e (2.2.26)). Modele e resolva instâncias dos dois modelos usando os dados do Exercício 2.3.*

Exercício 2.5. *Faça as adaptações necessárias na formulação PCV-MTZ de forma que ela modele um problema em que o caixeiro viajante deve retornar a cidade origem t e não deve visitar mais do que p cidades em cada ciclo.*

Exercício 2.6. *Proponha um exemplo que possa ser representado graficamente e que ilustre o problema de Localização de Facilidades. Inclua valores para os custos e , descreva a situação representada de acordo com o modelo (2.3.38)-(2.3.41).*

	2	3	4	5
	3	3	5	1
	4	5	3	2
	5	1	2	4

Tabela com os custos das arestas entre dois vértices da mesma cor.

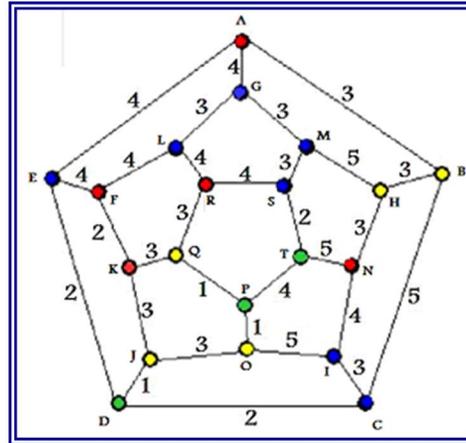


Figura 2.3: Rede para o Jogo de Hamilton [88]

Exercício 2.7. *Faça uma análise do limitante dual obtido pela relaxação linear do modelo (2.3.38)-(2.3.41) e observe que ele pode ser melhorado se as restrições (2.3.42) forem acrescentadas ao modelo.*

Capítulo 3

O problema de dimensionamento de lotes

O planejamento da produção envolve diversas decisões que precisam ser tomadas a curto, médio e longo prazos. Naturalmente, estas decisões dependem, entre outros fatores, do tipo de indústria. Neste Capítulo são discutidos elementos comuns a diversos contextos industriais, e que são úteis na tomada de decisões de médio prazo relacionadas a quanto e quando produzir. Na literatura, o problema de planejamento da produção envolvendo estas duas questões é, em geral, definido como o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL) (nos textos em inglês, o termo usado é *LSP - Lot Sizing Problem*). Em diversos processos produtivos a quantidade a ser produzida em determinado intervalo de tempo é chamada de lote, daí o nome do problema.

Diferentes aspectos são usados para caracterizar o PDL. Para representar o problema por meio de modelos de otimização são definidos a seguir alguns desses aspectos tomando por base o trabalho de Karimi *et al.* [62]. O número de tipos de produtos é uma característica importante que afeta o modelo e a dificuldade de resolução do problema. Em relação ao número de produtos fabricados (itens) há dois tipos principais de sistemas de produção, conforme explicitado na Definição 3.1.

Definição 3.1. *Itens - Em um sistema tipo **único-item** temos apenas um item que será produzido. Quando vários itens distintos são produzidos temos um problema **multi-itens**.*

Definição 3.2. *Estágios - O sistema produtivo pode ser classificado como **multiestágio** ou **monoestágio**. No sistema multiestágio, a produção de alguns itens (chamados de produtos ou itens finais) depende da produção de outros itens (componentes). A demanda dos itens de um estágio depende da quantidade produzida em estágios anteriores e assim temos demandas dependentes. No sistema monoestágio o item é produzido de maneira direta, em um único estágio. As demandas são satisfeitas diretamente pela produção do item final, neste caso dizemos que o problema tem demandas independentes. No caso multiestágio, alguns itens componentes podem ter simultaneamente demandas dependentes e independentes.*

Definição 3.3. *Demanda - Um problema tem itens com **demanda estática** se os valores da demanda não mudam em relação ao tempo, e **demanda dinâmica** se ocorre variação no valor da demanda ao longo do tempo. Se os valores da demanda*

são conhecidos, temos um problema com **demanda determinística**. Se os valores da demanda são conhecidos segundo uma distribuição de probabilidade, temos um problema com **demanda estocástica** [3].

Definição 3.4. *Horizonte de Planejamento* - Horizonte de planejamento é o intervalo de tempo considerado no planejamento da produção, e pode ser considerado **finito** ou **infinito**. O sistema produtivo pode ser planejado de dois modos classificados por problemas **contínuos** ou **discretos**.

O caso com horizonte de planejamento finito é usualmente acompanhado por uma demanda dinâmica, e o caso infinito por uma demanda estática. No caso de problemas discretos, o horizonte de planejamento é dividido em intervalos de tempo menores chamados de períodos. Considerar ou não a capacidade de produção no modelo matemático, Definição 3.5, é um fator importante porque afeta a complexidade computacional do problema de dimensionamento de lotes.

Definição 3.5. *Capacidade* - Um problema em que é possível produzir qualquer quantidade de itens é classificado como **não capacitado**. Se existe um limite máximo para a quantidade a ser produzida, o problema é **capacitado**.

Outro fator importante que afeta a estrutura e a complexidade computacional do problema é se o tempo (e/ou o custo) de preparação das máquinas para a produção (de forma simplificada preparo ou *setup* em inglês) é considerado.

Definição 3.6. *Tempo e custo de preparo* - Se o tempo (custo) necessário para a preparação das máquinas depende apenas do item para o qual a máquina está sendo preparada dizemos que o **tempo (custo) de preparo** é **simples**. Se o tempo (custo) necessário para a preparação das máquinas depende também do item produzido antes (ou depois) então o **tempo (custo) de preparo** é **complexo**, ou o **tempo (custo) de preparo** é **dependente da sequência**.

Em determinadas indústrias, a produção excedente de um determinado produto pode ser armazenada para o atendimento de demandas futuras. Uma das grandes questões a ser respondida ao se estudar o PDL nessas situações é a determinação do balanço (em inglês *trade off*) ideal entre custo de preparo e custo de estoque.

Definição 3.7. *Estoque* - A quantidade excedente armazenada é chamada de **estoque** (inventory em inglês) e em geral existe um custo associado ao armazenamento de produtos (custo de estoque).

Definição 3.8. *Atraso na entrega* - Em certos contextos industriais, a demanda não atendida em um período pode ser atendida em períodos posteriores. Essa demanda não atendida é chamada **atraso na entrega** (backlogging em inglês).

O atraso na entrega de um produto pode gerar custos adicionais. Em algumas situações, o atraso de entrega é permitido para evitar infactibilidades no problema capacitado. Uma classificação dos problemas de dimensionamento considerando esses e outros aspectos é apresentada no Capítulo 4 de [87] (ver também [21]). Nas próximas seções é feita uma contextualização histórica do PDL e são apresentados modelos de otimização para várias classes de problemas.

3.1 Contextualização histórica

Os primeiros estudos de problemas de dimensionamento de lotes ocorreram com o *Economic Order Quantity* (EOQ). De acordo com [6] o modelo EOQ é um dos

mais antigos modelos de análise de estoque da literatura. O primeiro a tratar este problema foi Ford Whitman Harris que nasceu em 1877 e morreu em 1962. Em 1913, Harris ([57]) propôs o EOQ para o PDL não capacitado, contínuo com horizonte de planejamento infinito, único-item, e considerando que a demanda ocorre continuamente com uma taxa constante. A solução ótima deste problema pode ser obtida por uma expressão analítica. Evoluções deste problema continuam sendo estudadas até hoje, uma revisão bibliográfica recente pode ser encontrada em [6].

Paralelamente, surgiram modelos que se ajustavam cada vez mais à realidade industrial. Em 1950, foi proposto um modelo para o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP). O problema é contínuo, monoestágio, capacitado e multi-itens. A demanda é estacionária, e o horizonte de planejamento considerado infinito. Um avanço no estudo do PDL se deu ao se considerar a demanda dinâmica, no problema hoje conhecido como WW (Wagner e Whitin) em homenagem aos autores, apresentado em 1958 [99]. O problema WW é monoestágio, não capacitado, com custo de preparo e único-item. O diferencial em relação aos problemas tratados anteriormente é o fato de considerar um horizonte de planejamento finito, dividido em vários períodos discretos. Wagner e Whitin propõem também um método para encontrar a solução ótima do problema WW em tempo polinomial que é apresentado na Seção 3.3.2. Modelos de otimização para o PDL monoestágio único-item são apresentados na Seção 3.2, e métodos básicos de solução na Seção 3.3.

O passo seguinte nas pesquisas, e que até hoje predomina na maioria dos estudos sobre o PDL consiste, em linhas gerais, em problemas que consideram multi-itens, demanda dinâmica e capacitado. Modelos de otimização para estes problemas são apresentados na Seção 3.5. Os modelos para problemas multi-itens são úteis também na representação matemática dos problemas multi-estágios discutidos na Seção 3.6.

3.2 Problema de dimensionamento de lotes monoestágio e único-item

Nesta seção consideramos o problema de dimensionamento de lotes monoestágio e único-item. O horizonte de planejamento considerado é finito e dividido em períodos. O critério de otimização usual nesta classe de problemas é a minimização do custo total de produção considerando custos de preparo, produção e estoque. O exemplo 3.1 ilustra de forma simplificada o problema em uma fábrica de móveis.

Exemplo 3.1. *Certa indústria de móveis, que fabrica um determinado tipo de guarda-roupa, deseja fazer um planejamento da produção para um horizonte de quatro dias. Sabe-se que a demanda para os próximos quatro dias é de 104, 174, 46 e 112 unidades respectivamente. Para que a produção possa ocorrer em determinado dia é necessário preparar a linha de produção, e os ajustes necessários só são feitos uma vez por dia. O custo para preparar a máquina é de 150,00 unidades monetária (u.m.) por dia, e é o mesmo em todos os dias. Visando expansões da fábrica no futuro, a linha de produção foi montada de forma que é possível atender a demanda dos quatro dias em um único dia de produção. A fábrica também possui um armazém onde é possível estocar a produção excedente a um custo de 2,00 u.m. por unidade por dia. O custo de produção de cada guarda-roupa é 1 u.m.. O gerente de produção deseja definir quantos guarda-roupas produzir a cada dia (lote) de forma a atender a demanda com menor custo possível.*

Para representar a situação descrita no Exemplo 3.1 por um modelo matemático de otimização, precisamos identificar, conforme sugerido em [91] e discutido no

Capítulo 1, os elementos conhecidos e os elementos desconhecidos do problema.

Elementos conhecidos (dados)

- fabricação de apenas um produto por dia;
- planejamento para 4 dias;
- demanda para cada um dos quatro dias;
- custo unitário de produção;
- custo de preparação da linha de produção, apenas uma preparação por dia;
- a capacidade da linha de produção é mais do que suficiente para a produção da demanda dos 4 dias;
- possibilidade de armazenamento de produtos a um custo unitário conhecido.

Elementos desconhecidos (incógnitas)

- quanto produzir a cada dia;
- quanto armazenar a cada dia;
- preparar ou não a linha de produção a cada dia.

De acordo com essas informações, e as definições 3.1-3.8 é possível classificar essa situação como um PDL único-item, monoestágio, demanda dinâmica, horizonte de planejamento finito e dividido em períodos, não capacitado, com custo de preparo. De acordo com esta classificação, os elementos conhecidos acima podem ser representados de uma forma mais geral definindo o parâmetro T para representar o número total de períodos no horizonte de planejamento (no Exemplo 3.1, $T = 4$ dias) e o seguinte conjunto de índices:

Índices

$t = \{1, \dots, T\}$: períodos de tempo.

Os demais elementos conhecidos podem ser representados de acordo com os parâmetros:

Parâmetros:

d_t : demanda no período t ;

c_t : custo unitário de produção no período t ;

S_t : custo de preparação para a produção no período t ;

H_t : custo unitário de estoque no período t .

No Exemplo 3.1 os valores para estes parâmetros são:

Definição de valores dos parâmetros do Exemplo 3.1:

demanda: $d_1=104$, $d_2=174$, $d_3=46$ e $d_4=112$;

custo de produção: $c_t = 1$, $t = 1, \dots, 4$;

custo de preparação: $S_t = 150$, $t = 1, \dots, 4$;

custo de estoque: $H_t = 2$, $t = 1, \dots, 4$.

Nos problemas de dimensionamento de lotes, os elementos desconhecidos relacionados a quanto produzir e quanto armazenar são, em geral, representados através de variáveis contínuas ao invés de variáveis inteiras. Essa simplificação pode ser feita porque na maioria dos problemas práticos deve-se produzir e estocar grandes quantidades, o que torna insignificante o arredondamento *a posteriori* dos valores dessas variáveis. A decisão associada a preparar ou não a linha de produção a cada dia é representada por uma variável binária que assume valor 1 se houve preparo e 0 caso contrário. Matematicamente temos:

Variáveis de decisão

X_t : quantidade produzida no período t ;

I_t : quantidade em estoque no período t ;

Y_t : é igual a 1 se há preparação no período t e 0 caso contrário.

O critério a ser usado na tomada de decisões está claro no enunciado: minimizar o custo total. Este custo é calculado considerando a soma dos valores de c_t, H_t, S_t multiplicados pelas respectivas variáveis X_t, I_t, Y_t ao longo do horizonte de planejamento. Neste caso não há economia de escala, e o custo é diretamente proporcional à quantidade. Este critério é usual nos modelos para o PDL e reflete o balanceamento que deve haver entre produzir e armazenar, levando em consideração o custo de preparo. De uma maneira geral, este critério pode ser representado de acordo com 3.2.1.

Função Objetivo

$$\min \sum_{t=1}^T (c_t X_t + H_t I_t + S_t Y_t) \quad (3.2.1)$$

O mínimo da função expressa em (3.2.1) é zero se não forem impostas restrições para os valores das variáveis garantindo o atendimento da demanda a cada dia. Como modelar o atendimento à demanda? Um primeiro passo é considerar que a cada período a quantidade produzida (X_t) deve ser no mínimo igual à demanda. Matematicamente temos a expressão 3.2.2.

Atendimento à demanda - Formulação I

$$X_t \geq d_t. \quad (3.2.2)$$

O que acontece no caso em que $X_t > d_t$? Conforme descrito no enunciado do problema, o excesso de produção no período t (isto é a folga associada à restrição (3.2.2)) pode ser armazenada e usada para atender a demanda de períodos posteriores. Esta quantidade é representada pela variável I_t , e a restrição de atendimento à demanda pode ser reformulada de acordo com 3.2.3.

Atendimento à demanda - Formulação II

$$X_t - I_t = d_t. \quad (3.2.3)$$

A restrição (3.2.3) ainda não esta completa. Por que? A expressão (3.2.4) modela corretamente a condição de atendimento à demanda e são conhecidas como restrições de balanceamento entre estoque e produção ou simplesmente restrições de balanceamento de estoques. Note que de acordo com esta restrição, a demanda pode ser atendida pela quantidade disponível no período (quantidade produzida (X_t) somada à quantidade em estoque no final do período anterior (I_{t-1})), o excesso é armazenado (I_t) e pode ser usado no atendimento à demanda em períodos posteriores.

Restrição: balanceamento entre estoque e produção

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t, \quad t = 1 \dots T. \quad (3.2.4)$$

É necessário lembrar que só pode haver produção se a linha de produção estiver preparada. Temos aqui uma situação similar à ocorrida na modelagem do Problema de Localização de Facilidades discutido na Seção 2.3. Temos uma restrição disjuntiva: ($Y_t = 1$ e $X_t > 0$) ou ($Y_t = 0$ e $X_t = 0$). A representação matemática é similar, e acrescentamos ao modelo as restrições (3.2.5). No contexto do PDL, estas restrições são conhecidas como Restrições de Preparo (ou Restrições de *Setup*)

Restrição: Preparo - Formulação I

$$X_t \leq MY_t, \quad t = 1 \dots T. \quad (3.2.5)$$

O Modelo completo para o problema de dimensionamento de lotes único-item é dado por (3.2.6).

$$\min \sum_{t=1}^T H_t I_t + c_t X_t + S_t Y_t$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} X_t + I_{t-1} - I_t &= d_t & t = 1 \dots T \\ X_t &\leq MY_t & t = 1 \dots T \\ Y_t &\in \{0, 1\} & t = 1 \dots T \\ X_t \geq 0, \quad I_t \geq 0, \quad I_0 &= 0 & t = 1 \dots T. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Reformulação I : Novas Restrições de preparo

Considere a relaxação linear do modelo (3.2.6) (ver Seção 1.3). Da forma como foi definida a restrição (3.2.5), em uma solução ótima para a relaxação linear $Y_t = \frac{X_t}{M}$. Assim quando o valor de M é muito grande Y_t será próximo de 0. Como o custo de preparação S_t está associado à variável Y_t na função objetivo, o valor da função objetivo da relaxação linear será muito menor que o valor da função objetivo da solução do problema original, produzindo um limitante inferior de qualidade ruim. Limitantes duais melhores podem ser obtidos pela relaxação linear substituindo o valor de M , por exemplo, por $\sum_{\tau=t}^T d_\tau$. Este valor permite a produção no período t para o atendimento da demanda desse período t e de toda a demanda posterior. Ou

seja, este novo valor de M não elimina soluções factíveis. Assim uma formulação mais forte para o problema PDL único-item é obtida substituindo-se as restrições (3.2.5) pelas restrições (3.2.7) no modelo (3.2.6).

Restrição: Preparo - Formulação II

$$X_t \leq \left(\sum_{\tau=t}^T d_\tau \right) Y_t, \quad t = 1 \dots T. \quad (3.2.7)$$

Reformulação II : Inequações Válidas

Barany *et al.* [18] propõem alternativas para as restrições (3.2.5) com o objetivo de obter formulações mais fortes para o problema PDL único-item. É demonstrado que as inequações (3.2.8)-(3.2.10) são válidas para o problema e podem ser usadas como planos de corte.

- Para um único período t , temos que a produção será menor ou igual à demanda deste período mais o estoque remanescente deste período, ou seja:

$$X_t \leq d_t Y_t + I_t; \quad (3.2.8)$$

- Analogamente, se considerarmos dois períodos t e $t + 1$ temos:

$$X_t + X_{t+1} \leq (d_t + d_{t+1}) Y_t + d_{t+1} Y_{t+1} + I_{t+1}; \quad (3.2.9)$$

- De forma geral, é possível relacionar o estoque de um período l com a produção e a demanda de um subconjunto de períodos $S \subseteq \{1 \dots l\}$:

$$\sum_{t \in S} X_t \leq \sum_{t \in S} \left(\sum_{k=1}^l d_k \right) Y_t + I_l. \quad (3.2.10)$$

As inequações (3.2.10) são conhecidas como inequações (l, S) , e junto com a condição $I_0 = I_T = 0$ e as restrições (3.2.4), (3.2.5) são suficientes para definir o envoltório convexo do conjunto de soluções factíveis para o problema PDL único-item. Para mais detalhes ver a Seção 7.4 de [87].

3.2.1 PDL na sintaxe da linguagem AMPL

Na Figura 3.1 é exibido o modelo matemático (3.2.6) considerando as restrições (3.2.7) escrito na sintaxe da linguagem de modelagem AMPL ([47]), arquivo “PDL1.mod”. O arquivo entrada de dados (“PDL-mv.dat”) para o Exemplo 3.1 é exibido na Figura 3.2.

O modelo (3.2.6) é um modelo de otimização linear inteira mista (OIM), com $2T$ restrições (8 no Exemplo 3.2.7) e $3T$ variáveis (11 no Exemplo 3.2.7).

3.3 Métodos básicos de solução para o PDL único-item

Embora não seja o principal enfoque deste texto, apresentamos nesta seção alguns métodos básicos de solução para o problema de dimensionamento de lotes

```

# AMPL Modeling System-Copyright (c) - Problema de dimensionamento de lotes
param T integer >=0;
param c {t in 1..T} >=0;
param S {t in 1..T} >=0;
param H {t in 1..T} >=0;
param d {t in 1..T} >=0;
var Y {t in 1..T} binary;
var X {t in 1..T} >=0;
var I {t in 0..T} >=0;
fix I[0]=0;
minimize funcao objetivo: sum {t in 1..T} (H[t]*I[t]+c[t]*X[t]+S[t]*Y[t]);
subject to demanda {t in 1..T}: I[t-1] + X[t] - I[t] = d[t];
subject to setup {t in 1..T}: X[t] <= sum { tau in t..T} d[tau]*Y[tau];

```

Figura 3.1: Modelo para o PDL único-item - Sintaxe AMPL - Arquivo “PDL1.mod”

```

# AMPL Modeling System - Copyright (c)
data;
param T:= 4;
param: c S H :=
1 1 150 2
2 1 150 2
3 1 150 2
4 1 150 2;
param: d:=
1 104
2 174
3 46
4 112;

```

Figura 3.2: Dados para o Exemplo 3.1 - Sintaxe AMPL - Arquivo “PDL-mv.dat”

único-item, não capacitado discutido na Seção 3.2. Inicialmente, são apresentados alguns métodos heurísticos, começando pelo método Lote-por-Lote, seguido pelas heurísticas de Silver-Meal, do Custo Unitário Mínimo e a de Balanço por Partes. O método ótimo proposto por [99] é apresentado na Seção 3.3.2, o qual é bastante utilizado em outros procedimentos de solução para outras classes de problemas de dimensionamento de lotes. Mais detalhes sobre este métodos podem ser encontrados em [78] e [8].

3.3.1 Heurísticas

Os métodos heurísticos são procedimentos realizados para se obter soluções factíveis. Neste tipo de procedimento não há garantias de obtenção da solução ótima do problema. Alguns procedimentos, chamados algoritmos aproximativos, também não garantem a obtenção de uma solução ótima, porém é feito um cálculo de quão próximo da solução ótima está a solução factível obtida. Mais detalhes sobre métodos heurísticos e aproximativos podem ser obtidos, por exemplo, em [28].

Os métodos heurísticos descritos a seguir são úteis para a obtenção de limites

primais (limites superiores) para o PDL único-item. Os custos de produção (c_t , $t=1, \dots, T$) serão considerados constantes e, por isso, serão omitidos sem prejuízo do resultado final.

- **Heurística Lote-por-Lote.** Esta heurística consiste num método básico em que a quantidade produzida em um período visa atender somente a demanda do período em questão, daí a origem do nome “Lote-por-Lote”. Neste caso, o estoque é sempre nulo, e são feitas preparações de linha de produção em todos os períodos com demanda positiva.
- **Heurística de Silver-Meal.** Este método recebe este nome em homenagem aos autores, Edward Silver e Harlan Meal. Considere $C(t)$ como sendo o custo total de produção até o período t , dividido por t . Assim, se no período 1 for produzido uma quantidade visando atender somente a demanda deste período, não existirá então o custo de estoque (H_1), mas somente um custo de preparação (S_1). Logo: $C(1) = S_1$. No entanto, se no período 1 a produção visa atender as demandas dos períodos 1 e 2, existirá um custo de estoque relativo à demanda do período 2, d_2 e $C(2) = (S_1 + H_1 d_2)/2$. De maneira análoga: $C(3) = (S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3)/3$. Em geral:

$$C(t) = \frac{(S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 + \dots + (H_1 + H_2 + \dots + H_{t-1}) d_t)}{t}, \quad t \leq T.$$

O procedimento começa no período $t = 1$ e examinam-se os períodos seguintes verificando que, se $C(t) > C(t - 1)$ para algum período t , o processo é interrompido temporariamente. Neste caso produz-se para atender as demandas dos períodos $1, \dots, t - 1$, e $X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_{t-1}$. O procedimento é recomeçado a partir do período t e o mesmo raciocínio é repetido. O procedimento é interrompido definitivamente quando $t = T$.

- **Heurística do Custo Unitário Mínimo.** Este procedimento é similar à heurística de Silver-Meal mas, ao invés de dividir o custo total de produção pelo período t , divide-se pela demanda total até o período t ($d_1 + d_2 + \dots + d_t$). Ou seja:

$$C(t) = \frac{(S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 + \dots + (H_1 + H_2 + \dots + H_{t-1}) d_t)}{(d_1 + d_2 + \dots + d_t)}, \quad t \leq T.$$

Observe que o resultado deste cálculo é igual à média dos custos unitários referentes à quantidade produzida, daí a origem do nome.

- **Heurística de Balanço por Partes.** Nesta heurística, inicia-se no primeiro período de planejamento e evolui-se em direção ao período final. Para cada período, calcula-se o custo de estoque (H_t) e soma-se aos custos de estoque dos períodos anteriores ($H_1 + H_2 + \dots + H_{t-1} + H_t$). Quando esta soma for maior que o custo fixo de preparação (S_t), o processo é interrompido e é feita uma comparação entre os períodos $t-1$ e t para verificar em qual deles a soma dos custos de estoque está mais próxima do custo fixo de preparação. Neste caso produz-se para atender as demandas dos períodos 1 até este período. O procedimento recomeça considerando o período seguinte e o processo se repete.

3.3.2 O método ótimo de Wagner e Whitin

O método de solução para o PDL único-item proposto por Wagner e Whitin ([99]) que chamamos de Método WW, baseia-se na Propriedade 3.1 sobre as condições de otimalidade do problema.

Propriedade 3.1. *A solução ótima do problema de dimensionamento de lotes único-item satisfaz: $I_{t-1} X_t = 0$ para $t = 1, \dots, T$.*

Isto significa que a demanda de um período t deve ser satisfeita completamente com a produção do período t (X_t), ou com o estoque do período $(t-1)$ (I_{t-1}). Assim, a quantidade produzida num determinado período deve ser exatamente igual a soma de um conjunto de demandas futuras, ou seja:

$$\begin{aligned} X_1 &= d_1 \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 \dots \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_T \\ X_2 &= 0 \text{ ou } X_2 = d_2 \text{ ou } X_2 = d_2 + d_3 \dots \text{ ou } X_2 = d_2 + d_3 + \dots + d_T \\ X_3 &= 0 \text{ ou } X_3 = d_3 \text{ ou } X_3 = d_3 + d_4 \dots \text{ ou } X_3 = d_3 + d_4 + \dots + d_T \\ &\dots\dots\dots \\ X_T &= 0 \text{ ou } X_T = d_T \end{aligned}$$

Para resolver este problema, Wagner e Whitin ([99]) propõem uma técnica de programação dinâmica ([102]), onde a solução ótima é obtida utilizando-se o seguinte sistema de equações recursivas (3.3.11).

$$f_t = \min_{j>t}(C_{tj} + f_j) \quad t = 1, \dots, T; \quad f_{T+1} = 0. \quad (3.3.11)$$

Onde:

- f_t é o custo mínimo para o período de planejamento t e deve-se encontrar o período j ($j > t$) para o qual este mínimo ocorre;
- C_{tj} é determinado pela expressão geral (3.3.12) para $t = 1, \dots, T$ $j = t + 1, \dots, (T + 1)$.

$$\begin{aligned} C_{tj} = & S_t + H_t d_{t+1} + (H_t + H_{t+1})d_{t+2} + (H_t + H_{t+1} + H_{t+2})d_{t+3} + \dots \quad (3.3.12) \\ & \dots + (H_t + H_{t+1} + \dots + H_{t-2})d_{t-1}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. *O cálculo dos custos C_{tj} considerando os dados do Exemplo 3.1 são feitos considerando que $t = 1, 2, 3, 4$ e $j = 2, 3, 4, 5$. Note que considera-se um*

período adicional $T + 1$, e que os custos de produção são considerados nulos.

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= S_1 = 150 \\
 C_{13} &= S_1 + H_1 d_2 = 150 + 2(174) = 498 \\
 C_{14} &= S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 = 150 + 2(174) + \\
 &\quad (2 + 2)(46) = 150 + 2[174 + (46)(2)] = 682 \\
 C_{15} &= 150 + 2[174 + (46)(2) + (112)(3)] = 1354 \\
 C_{23} &= 150 \\
 C_{24} &= 150 + 2(46) = 242 \\
 C_{25} &= 150 + 2[46 + (112)(2)] = 690 \\
 C_{34} &= 150 \\
 C_{35} &= 150 + 2(112) = 374 \\
 C_{45} &= 150
 \end{aligned}$$

■

Determinado os custos, o próximo passo é obter o custo mínimo de planejamento para cada período pela aplicação da recursão (3.3.11) de forma regressiva ($t = 5, 4, \dots, 2, 1$). Lembre-se que devemos encontrar o período j ($j > t$) para o qual o mínimo ocorre.

Exemplo 3.3. *Solução da recursão (3.3.11) considerando os dados do Exemplo 3.1 e os custos, C_{tj} , calculados no Exemplo 3.2.*

$$\begin{aligned}
 f_5 &= 0 \\
 f_4 &= \min_{j>4}(C_{4j} + f_j) = \min(C_{45} + f_5) = C_{45} + f_5 = 150 \Rightarrow j = 5. \\
 f_3 &= \min_{j>3}(C_{3j} + f_j) = \min(C_{34} + f_4, C_{35} + f_5) = \\
 &\quad \min(150 + 150, 374 + 0) = \min(300, 374) = C_{34} + f_4 = 300 \Rightarrow j = 4. \\
 f_2 &= \min_{j>2}(C_{2j} + f_j) = \min(C_{23} + f_3, C_{24} + f_4, C_{25} + f_5) = \\
 &\quad \min(150 + 300, 242 + 150, 690 + 0) = \min(450, 392, 690) = \\
 &\quad C_{24} + f_4 = 392 \Rightarrow j = 4. \\
 f_1 &= \min_{j>1}(C_{1j} + f_j) = \min(C_{12} + f_2, C_{13} + f_3, C_{14} + f_4, C_{15} + f_5) \\
 &\quad = \min(150 + 392, 498 + 300, 682 + 150, 354 + 0) = \min(542, 798, 832, 1354) = \\
 &\quad C_{12} + f_2 = 542 \Rightarrow j = 2.
 \end{aligned}$$

■

De acordo com os cálculos feitos no Exemplo 3.3 temos que o custo total mínimo é igual $f_1 = 542$. É necessário agora recuperar a solução de acordo com os cálculos ilustrados no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4. *A política ótima de produção (isto é a quantidade a ser produzida ou estocada a cada período) para o problema enunciado no Exemplo 3.1 é obtida da seguinte forma.*

- **Período 1:** o valor ótimo de f_1 é dado por $C_{12} + f_2$, ou seja, o custo de se produzir no período 1 apenas para atender a demanda do período 1 (C_{12}) somado ao custo mínimo para o período 2 dado por f_2 . Portanto, a produção do período 1 é dada por $X_1 = d_1 = 104$.
- **Período 2:** o valor de j para o qual o mínimo de f_1 ocorreu é $j = 2$. O valor ótimo de f_2 é dado por $C_{24} + f_4$, que é o custo de se produzir no período 2 para atender as demandas dos períodos 2 e 3 (C_{24}), mais o custo mínimo para o período 4 (f_4). Portanto, a produção do período 2 é dada por $X_2 = d_2 + d_3 = 174 + 46 = 220$.
- **Período 3:** não há produção. A demanda será atendida pelo estoque do final do Período 2, I_2 .
- **Período 4:** o valor ótimo é $f_4 = C_{45} + f_5$ e portanto a produção neste período é: $X_4 = d_4 = 112$. Como $f_5 = 0$ o procedimento é interrompido.

A política ótima de produção é: $X = (104, 220, 0, 112), I = (0, 0, 46, 0)$. ■

O problema descrito no Exemplo 3.5 a seguir é resolvido pelo método WW e pelos métodos heurísticos descritos na Seção 3.3.1. A Tabela 3.2 mostra o custo total obtido em cada um dos métodos. Note que, para este exemplo, a heurística de Silver-Meal é a que produz a solução factível mais próxima da solução ótima obtida pelo método WW.

Exemplo 3.5. Considere o problema PDL único-item descrito no Exemplo 3.1 e um cenário descrito pelos dados a seguir. O horizonte de planejamento é de dez dias ($T=10$). A previsão de demanda para estes dias é conhecida e é dada pela Tabela 3.1. O custo para preparar as máquinas é $S_t = 132,00$ ($t=1, \dots, 10$) por preparação e o custo de estoque é $H_t = 0,60$ ($t=1, \dots, 10$) por unidade estocada a cada dia. Considere ainda, que o custo unitário para produzir uma unidade seja constante e portanto será omitido. ■

Dia (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda (dt)	42	42	32	12	26	112	45	14	76	38

Tabela 3.1: Dados de demanda do Exemplo 3.5

Método	Custo Total
Lote-por-Lote	1.320,00
Heurística de Silver-Meal	650,40
Heurística do custo unitário mínimo	718,80
Heurística de balanço por partes	693,60
Solução ótima (Wagner e Whitin)	610,20

Tabela 3.2: Comparação de métodos de solução para o PDL Exemplo 3.5

3.4 Reformulações

Conforme discutido no Capítulo 1 os métodos para resolver problemas de otimização inteira mista dependem fortemente de limites primais (obtidos a partir de soluções factíveis) e limites duais (obtidos a partir de relaxações). Diversos trabalhos da literatura ([4], [86], [60], [36], [35], [95], [10], [44], [75] e [45]) utilizam a ideia de reformular o modelo (3.2.6) para obter formulações mais fortes, e consequentemente limitantes duais melhores.

Nesta seção são apresentadas duas reformulações. A reformulação (PDL-SP) baseada no problema do caminho mínimo (*Shortest Path*, ver Seção 3.4.1) proposta em Eppen e Martin [39]; e a reformulação (PDL-FL) baseada no problema de localização de facilidades (*Facility Location*, ver Seção 3.4.2) estudada em Krarup e Bilde [64].

Uma das razões do sucesso dessas reformulações está diretamente relacionada à maneira como as variáveis contínuas de produção, X_t se acoplam às variáveis binárias de preparação Y_t (ver restrições (3.2.5)). Como já foi observado na Seção 3.2 (formulação (3.2.6)), na solução da relaxação linear o valor de Y_t é subestimado, e consequentemente os custos de preparação também são gerando limites duais ruins. Nemhauser e Wolsey [81] provam que as reformulações PDL-SP e PDL-FL são equivalentes e que descrevem o envoltório convexo do conjunto de soluções factíveis para o PDL único-item.

3.4.1 Reformulação por caminho mínimo

Nesta seção apresenta-se uma reformulação do modelo (3.2.6) como um Problema de Caminho Mínimo que utiliza a estratégia de redefinição de variável proposta em [39]. O novo modelo também pode ser interpretado como uma representação em redess para o algoritmo de programação dinâmica proposto por Wagner e Whitin [99] e discutido na Seção 3.3.2. A reformulação explora a estrutura especial do problema em que o tamanho de lote ótimo para um determinado período é sempre igual à soma de demandas para períodos futuros (veja a Propriedade 3.1 e os comentários logo após tal propriedade). Essa estrutura especial permite representar as várias possibilidades de produção com arcos de uma rede, e um caminho do nó 1 até o nó $T + 1$ nessa rede representa um plano de produção. Ao encontrar um caminho mínimo do nó 1 até o nó $T + 1$ estamos encontrando um plano de produção com custo mínimo.

Considere o Exemplo 3.1. Como os custos unitários de produção são constantes ($c_t=1$, $t = 1, \dots, 4$), estes serão omitidos sem prejuízo do resultado final. Incluímos um período $t = T + 1$ auxiliar adicional como fizemos no Método WW para resolver o PDL único-item. É possível representar este problema como um problema do caminho mínimo. Considere uma rede $G(V, A)$ com $|V| = T + 1$ vértices, e cada vértice, com exceção do vértice auxiliar, representa um período do horizonte de planejamento. Uma aresta $(t, j) \in A$, $t < j$, representa a possibilidade de que todas as demandas do período t ao período $j - 1$ são produzidas no período t , e cv_{tj} o custo associado. Por exemplo, na Figura 3.3 a aresta $(1, 5)$ representa a possibilidade de que a quantidade produzida no período $t = 1$ seja suficiente para atender as demandas do período $t = 1$ até o período $t = 4$, com custo $cv_{15} = (H_1(d_2 + d_3 + d_4) + H_2(d_3 + d_4) + H_3d_4)$. O custo de preparo S_1 é considerado explicitamente na função objetivo (ver 3.4.13 a seguir), e só é considerado no custo total se alguma aresta do caminho mínimo diverge do vértice 1 (existe produção no período 1). Resolver o problema de dimensionamento de lotes único-item considerando os dados

do Exemplo 3.1 equivale então a encontrar o caminho mínimo entre o vértice 1 e o vértice 5 no grafo exibido na Figura 3.3.

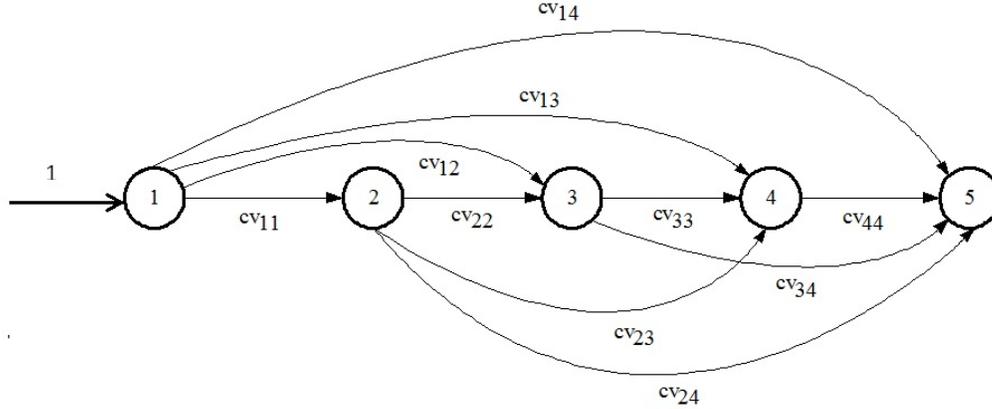


Figura 3.3: Problema de dimensionamento de lotes como um problema de caminho mínimo

Para construir a reformulação do PDL único-item como um problema de caminho mínimo, consideramos além dos parâmetros definidos na Seção 3.2, o parâmetro cv_{tk} para representar o custo das arestas da rede associada ao problema.

- **Custo das arestas.** cv_{tk} : custo da aresta (t, k) que representa o custo de estoque para a produção no período t que irá satisfazer a demanda do período t até $k - 1$, $cv_{tk} = \sum_{s=t+1}^{k-1} \sum_{u=t}^{s-1} H_u d_s$. Como os custos de produção são constantes, o valor $c_t \sum_{\tau=t}^{k-1} d_\tau$ foi omitido no cálculo de cv_{tk} ;

Conforme observado anteriormente, o parâmetro cv_{tk} não considera o custo de preparação S_t . Este custo é considerado explicitamente na função objetivo, e só é incluído no custo total se a aresta (t, k) pertencer ao caminho mínimo.

É necessário considerar também uma variável adicional que indicará se a aresta (t, k) foi incluída ou não no caminho.

- **Variável binária para representar o uso ou não de uma aresta.** z_{tk} indica se a aresta (t, k) que representa a produção no período t para satisfazer a demanda do período t até o período k será usada ($z_{tk} = 1$), ou não ($z_{tk} = 0$). Observe que a solução para a formulação (3.2.6) pode ser recuperada por $X_t = \sum_{k=t}^{T+1} (\sum_{\tau=t}^{k-1} d_\tau) z_{tk}$.

A função objetivo da reformulação inclui um custo fixo de utilização da aresta para representar o preparo da linha de produção no período t . Assim, além da soma dos custos das arestas, como é usual no problema de caminho mínimo, consideramos também a soma dos custos fixos de utilização das arestas. A função objetivo descrita em (3.4.13) minimiza a soma dos custos de preparação e estoque.

Função Objetivo:

$$\min \sum_{t=1}^T (S_t Y_t + \sum_{k=t+1}^{T+1} cv_{tk} z_{tk}) \quad (3.4.13)$$

É necessário garantir que a produção inicie no Período 1, ou seja, que exista pelo menos uma aresta que diverge do vértice 1 no caminho mínimo. A restrição (3.4.14) (equivalente à restrição (2.1.4)) garante esta condição.

Atendimento da demanda I

$$\sum_{k=2}^{T+1} z_{1k} = 1 \quad (3.4.14)$$

Não é necessário que haja produção em todos os demais períodos, mas se houver produção em algum período $k, k \neq 1, k \neq T+1$, representada pela aresta $(t, k), k > t$, é necessário garantir que a produção no período k seja suficiente para atender, pelo menos a demanda do período k , e isto será garantido se uma aresta divergente do vértice k for incluída no caminho. A restrição 3.4.15 (equivalente a (2.1.6)) impõe esta condição. Neste caso não é necessário incluir uma restrição equivalente à restrição (2.1.5) do problema de caminho mínimo pois seria redundante.

Atendimento da demanda II

$$\sum_{k=1}^{t-1} z_{kt} = \sum_{k=t+1}^{T+1} z_{tk}, \quad t = 2 \dots T. \quad (3.4.15)$$

Finalmente, é necessário garantir que uma aresta (t, k) será incluída no caminho somente se for vantajoso pagar pelo preparo da linha de produção no período t , restrição (3.4.16).

Utilização da arco (preparação da linha de produção)

$$\sum_{k=t+1}^{T+1} z_{tk} \leq Y_t; \quad t = 1 \dots T. \quad (3.4.16)$$

A reformulação do problema PDL único-item como um problema de caminho mínimo é representada em (3.4.17).

$$\min \sum_{t=1}^T \left(S_t Y_t + \sum_{k=t+1}^{T+1} cv_{tk} z_{tk} \right)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{T+1} z_{1k} &= 1 \\ \sum_{k=1}^{t-1} z_{kt} &= \sum_{k=t+1}^{T+1} z_{tk} && t = 2 \dots T \\ \sum_{k=t+1}^{T+1} z_{tk} &\leq Y_t && t = 1 \dots T \\ Y_t &\in \{0, 1\} && t = 1 \dots T \\ z_{tk} &\geq 0 && t, k = 1 \dots T (k \geq t). \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

De acordo com a restrição (3.4.14) e o critério de otimização, não é necessário impor que a variável z_{tk} seja binária. Quando se considera a relaxação linear da formulação (3.4.17), as restrições (3.4.16) são mais fortes do que as restrições (3.2.5), e portanto a reformulação resulta em limites duais melhores do que a formulação (3.2.6).

3.4.2 Reformulação por localização de facilidades

Uma estratégia similar à usada para obter a reformulação do PDL único-item como um problema do caminho mínimo é usada para obter a reformulação baseada no problema de localização de facilidades, PDL-FL. O problema é representado por uma rede $G(V, A)$ com $|V| = T$ vértices, e a aresta $(t, k) \in A$, representa um percentual da demanda do período k (cliente k) atendida pela produção no período t (facilidade instalada no local t).

Na reformulação, usaremos os parâmetros e variáveis já definidos nas Seções 3.2 e o parâmetro $\bar{c}v_{tk}$ para representar o custo das arestas da rede associada ao problema, os quais são diferentes daqueles definidos para a reformulação PDL-SP. Na reformulação PDL-FL é computado apenas o custo de produzir no período t para atender a demanda do período k , e na reformulação PDL-SP no parâmetro cv_{tk} é computado o custo de produzir no período t para atender a demanda do período t até o período k .

- **Custo das arestas.** $\bar{c}v_{tk}$: representa o custo de estoque para a produção no período t que irá satisfazer a demanda do período k , $\bar{c}v_{tk} = \sum_{u=t}^{k-1} H_u d_k$. Como os custos de produção são constantes, o valor $c_t d_k$ foi omitido no cálculo de $\bar{c}v_{tk}$;

Como na reformulação PDL-SP, o parâmetro $\bar{c}v_{tk}$ não considera o custo de preparação S_t . Este custo é considerado explicitamente na função objetivo.

Nova variável. \bar{z}_{tk} indica se a aresta (t, k) que representa a produção no período t para satisfazer a demanda do período k será usada ($\bar{z}_{tk} = 1$), ou não ($\bar{z}_{tk} = 0$). Observe que a solução para a formulação (3.2.6) pode ser recuperada por $X_t = \sum_{k=t}^T d_k \bar{z}_{tk}$.

Usando os dados do Exemplo 3.1, existem 4 locais para instalação das facilidades (representando a possibilidade de produção em cada período) e quatro clientes (representando a demanda em cada período). Os custos fixos para instalação das facilidades representam os custos fixos de preparação da linha de produção, S_t . A demanda do cliente 4 (demanda do período 4) pode ser atendida por facilidades instaladas nos locais (períodos) 1, 2, 3 ou 4. Já demanda do cliente 3, só pode ser atendida por facilidades instaladas nos locais 3, 2 ou 1. O custo para atender a demanda do cliente k pela facilidade instalada no local t , é dado pelo custo fixo de instalação da facilidade t , e um custo variável que depende do percentual de demanda do cliente k atendida pela facilidade t ($\bar{c}v_{tk} \bar{z}_{tk}$). Por exemplo, o custo para atender o cliente 3 a partir de uma facilidade instalada no local 1 é dado pelo custo fixo $S_1 = 150$ mais um custo variável $\bar{c}v_{13} = 2(46, 00) = 93, 00$, ou seja, o custo total de incluir o arco (1,3) na solução é 243,00. O problema consiste então em determinar em que locais (períodos) serão instaladas as facilidades (haverá produção) e qual é o percentual de demanda dos clientes que será atendida com cada facilidade. O critério de otimização é minimizar o custo total de instalação e de atendimento às demandas.

A reformulação do problema PDL único-item como um problema de localização de facilidades é apresentada em (3.4.18).

$$\min \sum_{t=1}^T \left(S_t Y_t + \sum_{k=t}^T \bar{c}v_{tk} \bar{z}_{tk} \right)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^t \tilde{z}_{kt} &= 1 & t = 1 \dots T \\
 \tilde{z}_{tk} &\leq Y_t & t = 1 \dots T \\
 Y_t &\in \{0, 1\} & t = 1 \dots T \\
 \tilde{z}_{tk} &\geq 0 & t, k = 1 \dots T (k \geq t).
 \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

3.5 Problema de dimensionamento de lotes multi-itens

Em diversos contextos industriais, existem vários itens diferentes que podem ser produzidos em um mesmo período. Nesta seção considera-se o problema de dimensionamento de lotes monoestágio, multi-itens, com restrição de capacidade, e com custos de produção, preparação e estoque. Para tornar a representação mais realista, serão considerados também tempos de preparação e de produção. Além disso, será considerado que todos os custos e as demandas podem variar de acordo com o item e o período.

A formulação do problema, baseada em [98], é apresentada considerando os índices, parâmetros e variáveis definidos a seguir. Observe que são similares aos apresentados na Seção 3.2, no entanto agora é necessário explicitar, além do período t , o item.

Índices

$t = \{1, \dots, T\}$ períodos de tempo;

$i = \{1, \dots, N\}$ itens.

Parâmetros

H_{it} custo unitário de estoque do item i no período t ;

c_{it} custo unitário de produção do item i no período t ;

b_{it} tempo unitário de produção do item i no período t ;

S_{it} custo de preparação para a produção do item i no período t ;

s_{it} tempo de preparação para a produção do item i no período t ;

Cap_t limite de capacidade em unidades de tempo no período t .

Variáveis

X_{it} quantidade produzida do item i no período t ;

I_{it} quantidade estocada do item i no período t ;

Y_{it} variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t .

A função objetivo e alguns conjuntos de restrições são similares àqueles da formulação (3.2.6), porém são incluídos, além dos índices relativos aos períodos, índices relativos aos itens. É necessário também incluir no modelo uma restrição adicional referente à capacidade de produção, isto é, uma restrição que garanta que o limite máximo de tempo disponível para a produção dos itens em cada período para a produção (Cap_t) seja respeitado. Assim, em cada período, deve-se considerar o tempo despendido para a produção dos vários itens, ($\sum_{i=1}^N b_{it}X_{it}$) e o tempo despendido com preparações da linha de produção ($\sum_{i=1}^N s_{it}Y_{it}$). Ou seja, deve-se impor a restrição (3.5.19).

Restrição de Capacidade.

$$\sum_{i=1}^N b_{it}X_{it} + \sum_{i=1}^N s_{it}Y_{it} \leq Cap_t; \quad t = 1 \dots T. \quad (3.5.19)$$

O Modelo completo para o problema de dimensionamento de lotes multi-item, capacitado, com tempos e custos de preparo (PDLM) é dado por (3.5.20)-(3.5.25).

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (c_{it}X_{it} + H_{it}I_{it} + S_{it}Y_{it}) \quad (3.5.20)$$

Sujeito a:

$$X_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.5.21)$$

$$\sum_{i=1}^N b_{it}X_{it} + \sum_{i=1}^N s_{it}Y_{it} \leq Cap_t \quad t = 1 \dots T \quad (3.5.22)$$

$$X_{it} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{i\tau}Y_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.5.23)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.5.24)$$

$$X_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0 \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T. \quad (3.5.25)$$

No modelo PDLM, a função objetivo (3.5.20) minimiza o custo total calculado pela soma dos custos de produção, estoque e preparo. As restrições (3.5.21) são de balanceamento de estoque. Para cada item e período, a quantidade produzida mais a quantidade disponível em estoque no final do período anterior menos o excesso de produção que ficará em estoque deve ser igual à demanda. As restrições (3.5.22) são restrições de capacidade. As restrições (3.5.23) asseguram que há produção apenas quando a linha de produção está preparada. O domínio das variáveis é definido em (3.5.24) e (3.5.25). O estoque inicial dos itens é zero ($I_{i0} = 0, \forall i$). A condição de integralidade sob as variáveis X_{it} e I_{it} foi relaxada devido ao fato de que, em problemas práticos, tais variáveis assumem altos valores e seu arredondamento posterior não causa grande impacto na solução obtida.

Florian *et al.* [46] mostraram que, para problemas com recursos de produção limitados e custos de preparo, encontrar a solução ótima para o problema com um único-item é um problema NP-Hard. Bitran e Yanasse [25] mostraram que vários casos de problemas com um único-item podem ser resolvidos em tempo polinomial, tornando-se NP-Hard quando um segundo item é introduzido. Quando se considera tempo de preparação, o problema de encontrar uma solução factível é NP-Completo ([72]). Para tempos de preparo nulos, as restrições são lineares e, portanto, o problema de encontrar uma solução factível é da classe P.

Vários métodos de solução exatos e heurísticos foram desenvolvidos para resolver o problema (3.5.20)-(3.5.25). Um método heurístico clássico consiste na heurística Lagrangiana desenvolvida por [98] (ver também [96, 44, 75, 45]), em que relaxam-se as restrições de capacidade (3.5.22) utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrição de capacidade. Estes subproblemas são resolvidos por programação dinâmica utilizando o algoritmo ótimo de Wagner e Whitin (Seção 3.3.2). O valor da solução do problema Lagrangiano (problema relaxado), constitui um limitante inferior para o problema original. Em geral, a solução do problema Lagrangiano é infactível para o problema original, pois viola as restrições de capacidade. Aplica-se então, uma heurística que transfere a produção entre períodos, na tentativa de obter uma solução factível. Por fim, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando-se o método de otimização do subgradiente ([55]). O método do subgradiente busca por um melhor (maior) limitante inferior. No entanto, em se tratando de programação inteira, o valor do melhor limitante inferior pode ser menor que o valor ótimo da função objetivo do problema original, devido ao chamado "gap de dualidade", que consiste na diferença entre o valor ótimo da função objetivo do problema dual Lagrangiano (melhor limitante inferior) e o valor ótimo da função objetivo do problema original.

Reformulações do modelo PDLM também tem sido consideradas com sucesso, por exemplo, em ([60], [95] e [15]). Alfieri *et al.* [4] também consideraram reformulações do problema PDL multi-item sem tempos de preparação, e os testes computacionais mostraram que o valor da função objetivo das relaxações lineares associadas às reformulações baseadas no problema do caminho mínimo e de localização é, em média 60% maior do que o da formulação original. Este valor reduz para 30% para o caso em que se consideram tempos de preparação ([36]).

3.6 Problema de dimensionamento de lotes multi-estágio

O problema de dimensionamento de lotes multiestágio ocorre quando a produção de um item depende da produção de outros itens, conforme Definição 3.2. A relação entre os itens finais e os demais itens, chamados itens predecessores ou componentes, pode ser representada por um digrafo $G(V, A)$ acíclico (ver um exemplo na Figura 3.4). A numeração dos itens é tal que, se um item i é predecessor de j , então $i > j$. O item 1 é sempre considerado como item final (podem haver diferentes itens finais). A estrutura representada na Figura 3.4 é uma estrutura geral, ou seja, não há restrição quanto ao número de predecessores e sucessores de um item, exceto os itens finais que não possuem sucessores. Existe ainda a estrutura serial onde cada item, com exceção do primeiro e do último, tem exatamente um sucessor e um predecessor; a estrutura de montagem, onde cada item pode ter vários predecessores, mas no máximo um sucessor e a estrutura plana onde o item final tem vários itens predecessores e estes têm somente o item final como sucessor e não têm nenhum item predecessor.

Lembrando os conceitos de conjunto de vértices sucessores ($S(i)$) e predecessores ($P(i)$) de um vértice i , conforme definido na Seção 2.1, temos as seguintes informações para o exemplo de estrutura geral exibido na Figura 3.4:

- $S(1) = \emptyset$, $S(2) = \{1\}$, $S(3) = \{1, 2\}$, $S(4) = \{2, 3\}$;
- $P(1) = \{2, 3\}$, $P(2) = \{3, 4\}$, $P(3) = \{4\}$, $P(4) = \emptyset$.

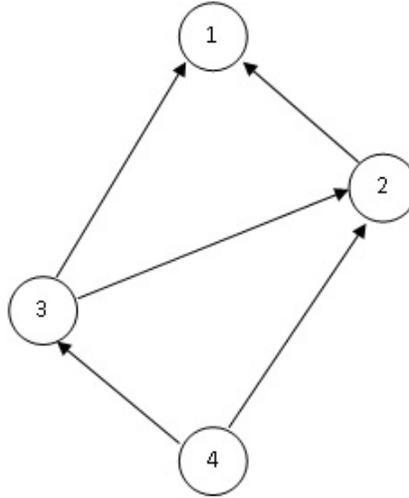


Figura 3.4: Exemplo de estrutura geral de produtos.

Para a formulação matemática do PDL multi-item, multi-estágios, além dos parâmetros definidos nas Seções 3.2 e 3.5, é necessário considerar também o seguinte parâmetro adicional:

- r_{ij} : quantidade de itens do tipo i necessária para compor uma unidade do item j .

Considerando o exemplo exibido na Figura 3.4, considere que: $r_{21} = 2$; $r_{31} = 3$; $r_{32} = 1$; $r_{42} = 2$; $r_{43} = 1$. Suponha que, num determinado período t , foi decidido produzir 10 unidades do item 1 ($X_{1t} = 10$), que não haja estoque de qualquer item ($I_{it} = 0$ $i=1, 2, 3, 4$) e que os itens 2, 3 e 4 não tenham demanda independente ($d_{2t} = 0, d_{3t} = 0, d_{4t} = 0$). Então a produção do item 2 deve ser de, pelo menos, 20 unidades no período t ($r_{21}X_{1t}=2 \times 10$) para poder atender a demanda dependente relativa à produção das 10 unidades do item 1. De forma análoga, a produção do item 3 deve ser de pelo menos 50 unidades ($r_{31} X_{1t} + r_{32} X_{2t} = 3 \times 10 + 1 \times 20=50$) e a do item 4 de, pelo menos, 90 unidades ($r_{42} X_{2t} + r_{43} X_{3t} = 2 \times 20 + 1 \times 50=90$). Portanto, a equação de balanço entre as variáveis de estoque e produção deve determinar que X_{it} e I_{it-1} devem suprir d_{it} mais $\sum_{j \in S(i)} r_{ij} X_{jt}$, a restrição (3.6.26) modela esta condição.

Restrição: balanceamento de estoque

$$X_{it} + I_{it-1} - I_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} X_{jt} \quad \forall i, t. \quad (3.6.26)$$

Billington *et al.* [24] formulam o problema de dimensionamento de lotes multi-estágio com restrições de capacidade e estrutura geral de produto, como o modelo

de otimização inteira mista (3.6.27)-(3.6.32).

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}I_{it} + c_{it}X_{it} + S_{it}Y_{it}) \quad (3.6.27)$$

Sujeito a:

$$X_{it} + I_{it-1} - I_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij}X_{jt} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.28)$$

$$\sum_{i=1}^N b_{ii}X_{it} + \sum_{i=1}^N s_{it}Y_{it} \leq Cap_t \quad t = 1 \dots T \quad (3.6.29)$$

$$X_{it} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{i\tau}Y_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.30)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.31)$$

$$X_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0 \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T. \quad (3.6.32)$$

Observe que esta formulação é similar à formulação (3.5.20)-(3.5.25) com exceção das restrições de balanceamento de estoque que agora são as restrições (3.6.28) que garantem que a produção e o estoque de um item seja suficiente para suprir a demanda independente, mais, eventualmente, uma quantidade para compor o lote dos itens sucessores (demanda dependente). Devido às restrições (3.6.28), o modelo multiestágio torna-se não decomponível por item quando relaxadas as restrições de capacidade, impedindo assim a utilização direta de técnicas de resolução empregadas a problemas monoestágios.

3.6.1 Estoque de escalão

Uma reformulação do problema (3.6.27)-(3.6.32) pode ser obtida adotando-se o conceito de estoque de escalão introduzido por [31] e implementado por [1]. Estoque de escalão de um item em um período (E_{it}) é a quantidade total do item presente no sistema, incluindo a quantidade do item em estoque, mais a quantidade do item contida no estoque de seus sucessores. O estoque de escalão é ilustrado pelo Exemplo 3.6.

Exemplo 3.6. *Considere a estrutura de itens exibida na Figura 3.4.*

- **Item 1:** a quantidade do item 1 existente no sistema é apenas o seu estoque, já que este não possui sucessor. Logo, seu estoque de escalão é seu próprio estoque convencional ou seja: $E_{1t} = I_{1t}$
- **Item 2:** o item 2, além de ter seu próprio estoque, está presente no item 1 ($S(2) = \{1\}$), portanto seu estoque de escalão é $E_{2t} = I_{2t} + r_{21}I_{1t}$.
- **Item 3:** no caso do item 3 deve-se considerar o próprio estoque, a quantidade do item 3 presente no estoque do item 2 e a quantidade do item 3 presente no estoque do item 1, ou seja: $E_{3t} = I_{3t} + r_{31}E_{1t} + r_{32}E_{2t}$.
- **Item 4:** de forma análoga, para o item 4 tem-se: $E_{4t} = I_{4t} + r_{42}E_{2t} + r_{43}E_{3t}$.

■

De uma maneira geral, o estoque de escalão para qualquer item i é definido como:

- **Estoque de escalão do item i :**

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt}. \quad (3.6.33)$$

Definindo um novo parâmetro, e_{it} , o custo de estoque de escalão pode ser calculado. A equivalência entre o custo de estoque convencional e o custo do estoque de escalão deve ser mantida de acordo com (3.6.34).

Parâmetro:

- e_{it} : custo de estoque de escalão do item i no período t .

Tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (e_{it} E_{it}) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it} I_{it}). \quad (3.6.34)$$

A expressão (3.6.34) pode ser reescrita (ver Exercício 3.8) de acordo com (3.6.35).

Custo do estoque de escalão:

$$e_{it} = H_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ij} H_{jt}. \quad (3.6.35)$$

Observe que, a definição de custo de estoque de escalão foi dada a partir da definição de custo de estoque convencional, de modo que se tenha um abatimento dos custos de estoque convencional de itens predecessores, pois, de acordo com a definição de estoque de escalão, os custos dos itens predecessores já teriam sido calculados.

Para reformular o modelo (3.6.27)-(3.6.32) em termos de estoque de escalão, inicialmente, serão examinadas as restrições de balanceamento de estoque (3.6.28). Considere a restrição referente ao item 2, e a estrutura de produto ilustrada na Figura 3.4. Utilizando estoque convencional, temos que:

$$I_{2,t-1} + X_{2t} - I_{2t} = d_{2t} + r_{21} X_{1t} \quad (3.6.36)$$

Observe que:

$$X_{1t} = d_{1t} + I_{1t} - I_{1,t-1}. \quad (3.6.37)$$

Substituindo (3.6.37) em (3.6.36) temos:

$$I_{2,t-1} + r_{21} I_{1,t-1} + X_{2t} - I_{2t} - r_{21} I_{1t} = d_{2t} + r_{21} d_{1t} \quad (3.6.38)$$

Incluindo variáveis de estoque de escalão (3.6.33) na equação (3.6.38):

$$E_{2,t-1} + X_{2t} - E_{2t} = d_{2t} + r_{21} d_{1t}. \quad (3.6.39)$$

Observe que a equação de balanço utilizando estoque de escalão (3.6.39) não depende do tamanho dos lotes dos itens sucessores, mas sim, de suas demandas. A

demanda de escalão pode então ser contabilizada considerando as demandas independentes e dependentes (a demanda dos itens sucessores) de acordo com:

$$D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} d_{jt}.$$

Assim, de maneira geral, a restrição de balanceamento utilizando estoque de escalão pode ser reescrita de acordo com (3.6.40).

Restrição: balanceamento de estoque de escalão

$$E_{it-1} + X_{it} - E_{it} = D_{it} \quad \forall i, t \quad (3.6.40)$$

Falta impor que o estoque de escalão do item i no período t seja suficiente para suprir o estoque de escalão de seus itens sucessores:

$$E_{it} \geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt}$$

A formulação matemática para o PDL multi-itens, multi-estágios, considerando estoque de escalão é dada por (3.6.41)-(3.6.47).

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (e_{it} E_{it} + c_{it} X_{it} + S_{it} Y_{it}) \quad (3.6.41)$$

Sujeito a:

$$X_{it} + E_{it-1} - E_{it} = D_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.42)$$

$$E_{it} \geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.43)$$

$$\sum_{i=1}^N b_{ii} X_{it} + \sum_{i=1}^N s_{it} Y_{it} \leq Cap_t \quad t = 1 \dots T \quad (3.6.44)$$

$$X_{it} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{i\tau} Y_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.45)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (3.6.46)$$

$$X_{it} \geq 0, E_{it} \geq 0 \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T. \quad (3.6.47)$$

Utilizando o conceito de estoque de escalão, retira-se a dependência entre os itens que aparece nas restrições (3.6.28) do modelo para o PDL multi-estágios apresentado na Seção 3.6. A dependência entre os estágios encontra-se agora nas restrições (3.6.43). Observe que o modelo (3.6.41)-(3.6.47) sem as restrições (3.6.43) torna-se exatamente o modelo monoestágio (3.5.20)-(3.5.25). Assim, pode-se aplicar a técnica de relaxação Lagrangiana e utilizar os métodos de resolução para problemas monoestágios na resolução do problema PDL multi-estágios.

3.7 Exercícios

Exercício 3.1. Represente matricialmente o modelo (3.2.6) usando os dados contidos no Exemplo 3.1. Cada coluna da matriz vai representar uma variável e cada

linha uma restrição. Os valores da matriz serão os coeficientes de cada variável em cada restrição.

Exercício 3.2. Resolva o Exemplo 3.5 com cada um dos métodos vistos na Seção 3.3, de forma a obter a solução detalhada para cada método. Confira os resultados de acordo a Tabela 3.2.

Exercício 3.3. Considere os dados do Exemplo 3.5 desenhe gráficos de barras para representar a solução obtida em cada método visto na Seção 3.3.

a) No primeiro gráfico, o eixo das ordenadas representa os períodos e o eixo das coordenadas as quantidades relativas à demanda de cada período (barra 1), a quantidade produzida em cada período (barra 2) e a quantidade estocada em cada período (barra 3).

b) No segundo gráfico, o eixo das ordenadas representa os períodos e o eixo das coordenadas os custos associados a quantidade produzida em cada período (barra 1), a quantidade estocada em cada período (barra 2) e aos custos de preparação (barra 3).

c) Faça associações entre os dois gráficos de forma relacionar às decisões tomadas de acordo com cada método com os custos obtidos.

Exercício 3.4. Considere os dados do Exemplo 3.5. Encontre a solução ótima usando um sistema de otimização e compare com as soluções obtidas pelos métodos descritos na Seção 3.3.

Exercício 3.5. Desenhe os grafos associados ao Exemplo 3.5 interpretado como um problema de caminho mínimo e como um problema de localização de facilidades.

Exercício 3.6. Use um sistema de modelagem para representar o problema descrito no Exemplo 3.5 usando as reformulações descritas nas Seções 3.4.1 e 3.4.2. Use um sistema de otimização e determine a solução ótima das instâncias dessas formulações. A partir dos valores das variáveis relacionadas à solução ótima de cada reformulação, recupere o valor para as variáveis do modelo original (3.2.6). Determine uma maneira genérica de converter soluções entre estas três formulações.

Exercício 3.7. Relacione a propriedade de otimalidade de Wagner e Whitin com a reformulação do problema como um problema de caminho mínimo e observe que a reformulação é obtida com a interpretação da propriedade de otimalidade como possíveis arcos do grafo.

Exercício 3.8. Considere o PDL multi-itens e restrições de capacidade discutido na Seção 3.5. Adapte o Exemplo 3.1, considerando 4 tipos diferentes de produtos (o guarda-roupas é produzido em quatro cores diferentes) e a linha de produção tem um limite máximo de tempo dedicado à produção em cada período (PDL com restrições de capacidade). Gere valores relativos aos dados de demanda de cada item, ao tempo unitário de produção, ao tempo de preparação e a capacidade. Escreva o problema usando um sistema de modelagem e resolva com um sistema computacional.

Exercício 3.9. Custo de estoque de escalão. Mostre que:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (e_{it} E_{it}) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it} I_{it}) \Rightarrow e_{it} = H_{it} + \sum_{j \in P(i)} r_{ij} H_{jt}.$$

Capítulo 4

O Problema de sequenciamento de tarefas

O Problema de Sequenciamento (PS) consiste em determinar a sequência, ou a ordem, em que os itens (ou tarefas) serão produzidos em uma ou várias máquinas respeitando as restrições do setor de produção e de acordo com um critério pré-definido (por exemplo, minimizar o tempo total de processamento). Tais problemas aparecem em diversas situações reais, desde indústrias de manufatura até em empresas de serviço que devem entregar seus produtos ou serviços dentro de um prazo pré-determinado, ou mesmo escalonar (programar) as tarefas para usar de forma eficiente os recursos disponíveis [84].

4.1 Exemplo e conceitos básicos

O exemplo a seguir apresenta o problema de sequenciamento no contexto da produção de móveis. Este exemplo será usado para ilustrar a representação do problema por um modelo de otimização linear inteira.

Exemplo 4.1. *Considere o Exercício 3.7 do Capítulo 3. Suponha que após resolver o modelo (3.5.20)-(3.5.25), o resultado determine que a empresa de móveis deva produzir no dia 1 somente a demanda deste dia. Suponha que esta produção seja de um lote de 29 unidades de guarda-roupas da cor 1 (C_1) e lotes de 25 unidades de cada uma das cores 2, 3 e 4 (C_2 , C_3 , C_4 , respectivamente). Os guarda-roupas são pintados na nova máquina de pintura, em que, uma vez que o processo de pintura dos produtos com uma determinada cor seja iniciado não pode ser interrompido. Ou seja, depois de iniciada a pintura de um lote de produtos de uma cor, todos os produtos deste lote devem ser totalmente pintados antes que um novo preparo de máquina possa ser realizado. Embora a fábrica funcione 24 horas por dia, a máquina de pintura necessita de quatro horas diárias de manutenção, iniciando a produção à zero hora e parando às 20 horas. No dia 1 são produzidos produtos das quatro cores de forma que é necessário considerar o preparo da máquina para quatro cores diferentes neste dia. Devido às diferentes características (tais como tempo de secagem) os lotes de produtos de cada cor têm horários pré-definidos para finalização do processo de pintura. Caso algum lote de um produto seja finalizado depois do prazo um custo é cobrado por hora de atraso, pois, todo o processo de entrega dos lotes será atrasado. Os dados referentes ao tempo necessário para a produção de*

cada lote de produtos de determinada cor, o horário de entrega dos lotes e os custos estão resumidos na Tabela 4.1. O gerente de produção precisa definir a sequência em que os lotes de produtos de cada cor serão produzidos de forma a minimizar o atraso na finalização do processo de pintura (e os respectivos custos).

Cores	C1	C2	C3	C4
Tempo de Produção (horas)	6	4	8	2
Horário de Entrega	9	12	15	18
Multa por Atraso (\$/hora)	1	1	1	1

Tabela 4.1: Dados para o Problema do Exemplo 4.1

■

Uma decisão operacional importante na fabricação dos móveis no Exemplo 4.1 é a escolha da sequência em que estes devem ser pintados. Problemas deste tipo são chamados problemas de sequenciamento (escalonamento, programação da produção) de tarefas ([84]), ou simplesmente sequenciamento, *scheduling* no idioma inglês.

Existe uma nomenclatura própria para descrever Problemas de Sequenciamento, que é formada a partir do preenchimento de três campos ($\alpha/\beta/\gamma$). O campo α representa as características de quem executa as atividades, denominado por convenção como máquina(s). O campo β descreve as atividades e como estas estão relacionadas. O último campo, γ , se refere ao tipo de objetivo utilizado para determinar a sequência de produção. Uma descrição detalhada desta classificação pode ser consultada em [77] e [84]. No Exemplo 4.1 existe apenas uma máquina de pintura na fábrica, neste caso utiliza-se a denominação problema de máquina única ($\alpha = 1$). A máquina deve produzir lotes de quatro cores diferentes, assim, ao utilizar a palavra atividade estaremos nos referindo a produção de um lote de determinada cor de produto. Além disso, sabemos que não pode haver preempção, ou seja, o processo de pintura não pode ser interrompido. Também não há relação de precedência entre as atividades, nenhum dos lotes deve obrigatoriamente ser pintado antes de outro ($\beta = \emptyset$). Levando em consideração todos os dados do problema, o objetivo do gerente de produção é minimizar os custos relacionados à demora na finalização da entrega de cada um dos lotes ($\gamma = wT_{max}$, em que: $T_{max} = \max\{0, \text{atraso na entrega do lote } i\}, i = 1, \dots, 4$). Segundo a nomenclatura apresentada em [77] e [84], este problema é então classificado como $1||wT_{max}$.

Para construir um modelo de otimização linear que represente um problema de sequenciamento, consideramos que existem n atividades (tarefas, itens) para serem sequenciadas. E definimos os seguintes índices e parâmetros:

Índice

i : atividade, $i = 1 \dots n$.

Parâmetros

p_i : tempo de processamento da atividade i ;

e_i : data de entrega da atividade i ;

w_i : multa (peso) associada ao atraso na entrega da atividade i .

Considerando os parâmetros acima, queremos determinar o tempo de início de cada uma das atividades de forma a minimizar as multas relacionadas à demora na realização de cada uma das atividades. Outros critérios de otimização podem ser usados e levam a sequenciamentos equivalentes. Uma discussão sobre a equivalência entre critérios de otimização para problemas de sequenciamento pode ser encontrada em [84] e [17]. Um modelo de otimização linear inteira mista com restrições disjuntivas para representar o PS pode ser encontrado em [91] e nas referências citadas. Com base em [91], na Seção 4.2, apresentamos uma formulação para o problema conhecida como formulação indexada no tempo [2].

4.2 Modelo indexado pelo tempo

Uma forma de modelar problemas de sequenciamento é utilizando o tempo em que cada atividade inicia como índice das variáveis. Para construir o modelo calcula-se o tempo total necessário para o processamento de todas as tarefas. Este valor será usado para definir o tamanho do horizonte de planejamento T , isto é, T períodos de tempo. Um período pode ser definido em horas, turno de trabalho, dias ou outra unidade de tempo de acordo com a aplicação estudada. No caso do Exemplo 4.1 o período de tempo será medido em horas. Se tomarmos $T = \sum_{i=1}^n p_i$ não será permitido tempo ocioso na máquina, um valor menor que esse, não permite a execução de todas as tarefas.

Temos n atividades que podem começar em qualquer um dos períodos de 0 a T . A decisão a ser tomada então é se a atividade i começa ou não no período de tempo t . Assim temos:

Variável de decisão indexada pelo tempo:

x_{it} : variável binária que indica se a atividade i começa no período t ($x_{it} = 1$) ou não ($x_{it} = 0$)

Um critério de otimização apropriado é minimizar os custos associados à demora no término da atividade, isto é, minimizar as multas por atraso. Uma atividade i está atrasada se $t + p_i - 1 > e_i$, sendo t o período quando ela começa a ser executada. Assim a matriz de custos associada aos atrasos pode ser calculada de acordo com (4.2.1). O critério de otimização é a minimização do custo total de atraso em (4.2.2).

Cálculo do custo de atraso

$$c_{it} = \begin{cases} w_i((t + p_i - 1) - e_i) & \text{se } t + p_i - 1 > e_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

A função objetivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T-p_i+1} c_{it} x_{it}. \quad (4.2.2)$$

Precisamos garantir que cada atividade seja executada exatamente uma vez. Mas, considere, por exemplo, que a atividade 2, com tempo de processamento igual a 4 (ver Tabela 4.1), comece a ser executada no período $t = 18$ ($x_{2,18} = 1$). Não será possível concluí-la, pois, ela só terminará de ser executada no período $t = 18 + 4 - 1 = 21$, fora do horizonte de planejamento ($T = 20$). Para evitar este fato,

a atividade 2 deverá começar em um tempo anterior ou igual a $T - p_2 + 1$. Assim, é necessário impor também que cada uma das atividades seja concluída dentro do horizonte de planejamento, conforme (4.2.3).

Restrição: Todas as atividades devem ser executadas e concluídas

$$\sum_{t=1}^{T-p_i+1} x_{it} = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2.3)$$

Também é necessário garantir que exatamente uma atividade esteja sendo executada em cada período de tempo t . No Exemplo 4.1 a solução ($x_{23} = 1$ e $x_{34} = 1$), sugere que a atividade 2 comece no período 3 e a atividade 3 comece no período 4, satisfaz o conjunto de restrições (4.2.3). No entanto, de acordo com os tempos de execução exibidos na Tabela 4.1, no período $t = 4$ a máquina ainda estará ocupada com a atividade 2, e esta atividade só estará completa no final deste período ($t = 3 + p_2 - 1 = 6$). Portanto, apenas uma destas duas variáveis pode assumir valor 1. De fato, é necessário garantir que nenhuma atividade comece enquanto a máquina estiver ocupada. Para tanto, é necessário impor (4.2.4).

Restrições: No máximo uma atividade em cada período de tempo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=t-p_i+1}^t x_{is} \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.2.4)$$

Reunindo as informações acima chegamos ao modelo indexado por tempo para o problema de sequenciamento, modelo (4.2.5).

Modelo indexado no tempo para o sequenciamento de tarefas

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T-p_i+1} c_{it} x_{it} \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_{t=1}^{T-p_i+1} x_{it} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2.5) \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{s=t-p_i+1}^t x_{is} \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\ & x_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Para um exemplar com n atividades, a formulação (4.2.5) possui (nT) variáveis e $(n+T)$ restrições. No modelo com restrições disjuntas apresentado em [91], existem $(n^2 + 2n)$ variáveis e $(2n^2 + n)$ restrições. O modelo 4.2.5 para o exemplar definido de acordo com dados exibidos na Tabela 4.1 tem 80 variáveis e 24 restrições para o modelo indexado por tempo e 24 variáveis e 36 restrições para o modelo com restrições disjuntas. Uma grande vantagem do modelo indexado por tempo é que

a relaxação linear associada fornece bons limitantes para o problema inteiro. De fato os resultados de um estudo computacional apresentado em [23] demonstrou sua superioridade sobre o modelo com restrições disjuntas. Além disso, a estrutura do modelo indexado por tempo permite construir modelos que incluam restrições adicionais ao problema, por exemplo: restrições de tempo de preparo das máquinas que surgem quando é necessário preparar a máquina antes de começar a executar cada atividade. O alto número de variáveis presentes no modelo (4.2.5), que depende do número de períodos considerado no horizonte de planejamento, sugere o método de geração de colunas para resolvê-lo (ex. [2]). Outros modelos de otimização para problemas de sequenciamento podem ser encontrados por exemplo em [92].

Os principais métodos de solução descritos na literatura para problemas de sequenciamento são baseados em algoritmos heurísticos que fornecem soluções factíveis para o problema. A vantagem da utilização de modelos de otimização é poder resolvê-los usando sistemas gerais de otimização. Além disto, esses modelos podem fornecer bons limitantes para o valor ótimo, que servem de parâmetros para avaliação das soluções heurísticas. Os modelos matemáticos também podem ser úteis para tratar problemas com restrições adicionais ou mesmo na integração do problema de sequenciamento com outros problemas de planejamento da produção ou de logística. O modelo indexado no tempo serve de base para modelar o sequenciamento em alguns dos modelos para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento apresentados no Capítulo 5.

4.3 Exercícios

Exercício 4.1. *Encontre soluções factíveis para o Exemplo 4.1 e, se possível, a solução ótima.*

Exercício 4.2. *Como ficariam as soluções encontradas no Exercício 4.1 se, ao invés de minimizar os atrasos, quiséssemos minimizar o tempo em que a última tarefa é executada. Como ficaria a função objetivo neste caso.*

Exercício 4.3. *Escreva o modelo (4.2.5) considerando os dados do Exemplo 4.1.*

Exercício 4.4. *Pesquise sobre o uso restrições disjuntas para impor que duas tarefas não podem ser executadas ao mesmo tempo na mesma máquina e construa um modelo alternativo para o problema de sequenciamento discutido neste capítulo (consulte por exemplo [91, 84]).*

Exercício 4.5. *Use um sistema de modelagem e um de resolução para comparar instâncias do modelo apresentado na Seção 4.2 e do modelo com restrições disjuntas obtido no Exercício 4.4. Em particular compare os valores das relaxações lineares associadas aos dois modelos.*

Capítulo 5

Problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes

O planejamento da cadeia de suprimentos (*supply chain*) envolve decisões de longo prazo (ex. instalação de facilidades), de médio prazo (ex. atribuição de produção a fábricas, transporte da produção das fábricas para armazéns), e de curto prazo, que são decisões tomadas semanalmente, ou mesmo diariamente, a respeito da atribuição de itens a máquinas e a programação da produção [74]. O objetivo é obter um alto índice de satisfação dos clientes a um baixo custo de produção. Devido às interdependências entre os vários níveis da cadeia de suprimentos, para atingir soluções globalmente ótimas é importante que o planejamento seja feito considerando simultaneamente as várias decisões envolvidas, isto é, o planejamento deve ser integrado.

Neste capítulo, apresentamos estratégias de modelagem para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de lotes (PDSL). Como foi discutido nos Capítulos 3 e 4, os problemas de dimensionamento de lotes e de sequenciamento, aparecem em diversos contextos industriais e logísticos. A integração da tomada de decisões para estes dois problemas é de crucial importância em contextos industriais em que o preparo das máquinas depende da sequência em que os lotes são produzidos. Este é o caso, por exemplo, do planejamento da produção em indústrias de papel, itens de higiene, móveis, bebidas, fundições e nutrição animal. Boa parte das empresas resolve o problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção em duas etapas. Em uma etapa é determinada a dimensão dos lotes, levando em consideração as demandas dos produtos, disponibilidades de insumos, capacidade de produção, etc. Em outra etapa, a sequência dos lotes é definida considerando a capacidade da máquina e tempos de troca entre outros fatores que influenciam o sequenciamento da produção ([9], [12] e [41]).

Atualmente existem vários estudos que propõem o tratamento integrado dos dois problemas, revisões bibliográficas sobre o tema podem ser encontradas em [37, 61, 74, 10]. Duas estratégias básicas são usadas. Uma delas considera modelos em que os períodos são definidos como intervalos de tempo com curta duração, ou períodos de longa duração (macroperíodos) que são divididos em intervalos de tempo menores (subperíodos). Em cada período/subperíodo pode haver a produção de no máximo um ou dois itens. Assim, sabe-se exatamente o que, em que ordem, e

quanto será produzido em cada período, ou seja, determina-se o tamanho dos lotes e a sequência de produção. Uma crítica a esses modelos é que, como as variáveis de preparo, de troca e várias restrições são indexadas no tempo, ao se aumentar o número de períodos/subperíodos o número de variáveis e de restrições também cresce, dificultando a solução de instâncias de grande porte.

Outra estratégia básica propõe modelagens com restrições equivalentes às usadas para o problema do caixeiro viajante assimétrico (PCVA). Nestes modelos, também parte-se do modelo de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade (ver Seção 3.5) e incluem-se restrições adicionais para a eliminação de subsequências (subrotas) desconexas. Nas Seções 5.1 e 5.2 são apresentados, respectivamente modelos para PDSL baseados em modelos indexados no tempo e em modelos para o PCVA. Uma terceira abordagem é proposta em Kim *et al.* [63] em que o tempo não é discretizado. Esta última não é discutida neste texto.

5.1 Modelos para o PDSL baseados na indexação do tempo

Nesta seção são apresentados modelos matemáticos para o planejamento da produção em que as decisões associadas ao dimensionamento e sequenciamento de lotes são tratados de maneira conjunta. A idéia central dos modelos apresentados consiste em considerar os períodos (semanas ou dias) utilizados no problema de dimensionamento de lotes como intervalos de tempos menores (dias ou horas). Esta maneira de modelar o sequenciamento é similar à utilizada para obter o modelo indexado no tempo para o problema de sequenciamento apresentada na Seção 4.2. Nos modelos apresentados são desconsiderados os custos unitários de produção e tempo de preparação.

Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes discreto

No modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes discreto (DLSP - do termo em inglês *Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem*) considera-se que se um item for produzido em um determinado período, a quantidade produzida deve utilizar toda a capacidade do período (estratégia “tudo ou nada” - origem da palavra discreto no nome do modelo). Nesta estratégia, conhecida como *Small Bucket*, para modelar as decisões de sequenciamento considera-se que os períodos representam intervalos de tempo menores, dias ao invés de semanas (ou horas ao invés de dias), de modo que somente um tipo de item pode ser produzido por período. Considerando as definições de índices, parâmetros e variáveis apresentados no Capítulo 3, se há preparo da máquina para produzir o item i no período t , $Y_{it} = 1$, então a produção, X_{it} , é igual a Cap_t/b_i . Como apenas um tipo item é produzido em cada período e a ordem de produção é obtida naturalmente.

Para descrever o modelo DLSP, consideramos os dados e variáveis do modelo PDLM, (3.5.20)-(3.5.25). Como os períodos são considerados intervalos de tempos menores, não faz mais sentido considerar o custo de preparação em todos os períodos consecutivos nos quais se tem produção de um mesmo item. Se há produção de um mesmo item em dois ou mais períodos consecutivos, o custo de preparação da máquina deve ser considerado apenas uma vez. A inclusão de uma nova variável, para indicar se houve preparo da máquina para a produção de itens diferentes em dois períodos consecutivos, permite que o custo de preparação seja computado de

forma adequada na função objetivo. O custo de preparação que é dado por S_{it} deve ser modificado para S_i , pois, não faz sentido sua variação por subperíodos.

Novas variáveis - produção em dois períodos consecutivos, ou não

$Z_{it} = 1$ se o custo de preparo da máquina para produção do item i deve ser considerado no período t , e $Z_{it} = 0$ caso contrário.

A função objetivo do modelo DLSP é escrita em termos das variáveis de estoque e da nova variável de acordo com (5.1.1).

Função Objetivo - Modelo DLSP

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}I_{it} + S_i Z_{it}). \quad (5.1.1)$$

O controle da necessidade ou não da inclusão de um novo custo de preparo para o item i no custo total é feito com a adição de uma nova restrição que acopla a nova variável, Z_{it} , às variáveis de preparo de acordo com (5.1.2).

Novas restrições - controle de custo de preparo

$$Z_{it} \geq Y_{it} - Y_{i,t-1}, \forall i, t. \quad (5.1.2)$$

Note que, como as variáveis de preparação são binárias, o lado direito (*rhs* - do inglês *right hand side*) de (5.1.2) pode assumir apenas os valores 0 (quando $Y_{it} = 0$ e $Y_{i,t-1} = 0$ ou $Y_{it} = 1$ e $Y_{i,t-1} = 1$), -1 (quando $Y_{it} = 0$ e $Y_{i,t-1} = 1$), 1 (quando $Y_{it} = 1$ e $Y_{i,t-1} = 0$). Se o limite inferior para Z_{it} é igual a 0 ou -1 então $Z_{it} = 0$ e o preparo do item i no período t não é considerado. Quando o limite inferior é 1, temos que houve preparo da máquina no período t , mas não houve preparo do item i no período anterior. Como o critério de otimização é minimizar o custo total, a variável Z_{it} assume valor 1, e o custo de preparo da máquina para o item i no período t é computado.

Em outras palavras, a restrição (5.1.2) também pode ser interpretada como uma restrição que indica se houve troca da produção de itens entre dois períodos consecutivos. Isto é, se $Y_{it} = 0$ e $Y_{i,t-1} = 1$ sabemos que a produção do item i que ocorre no período $(t-1)$ é interrompida e poderá haver a produção de um item $j, j \neq i$ no período t . Raciocínio similar nos leva a entender que quando $Y_{it} = 1$ e $Y_{i,t-1} = 0$, pode ter havido a produção de um item $j, j \neq i$ no período $(t-1)$ que foi interrompida para que o item i seja produzido no período t .

Estas observações também indicam que não é necessário definir a variável Z_{it} como binária. Ela pode ser definida como uma variável contínua e as expressões (5.1.1) e (5.1.2) garantem que, numa solução ótima, ela assumirá apenas os valores 0 ou 1.

Para garantir o sequenciamento no modelo DLSP é necessário ainda incluir uma restrição que imponha que no máximo um item seja produzido em cada período. A expressão (5.1.3) garante esta condição, e (5.1.4) impõe a condição “tudo ou nada”.

Novas restrições - controle do número máximo de preparações por período e condição “tudo ou nada”

$$\sum_{t=1}^T Y_{it} \leq 1, \forall t \quad (5.1.3)$$

$$X_{it} = (Cap_t/b_i)Y_{it}, \forall i, t \quad (5.1.4)$$

O Modelo DLSP completo é então descrito em (5.1.5) .

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}I_{it} + S_i Z_{it})$$

Sujeito a:

$$X_{it} + I_{it-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T$$

$$X_{it} = (Cap_t/b_i)Y_{it} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T$$

$$\sum_{t=1}^T Y_{it} \leq 1 \quad t = 1 \dots T \quad (5.1.5)$$

$$Z_{it} \geq Y_{it} - Y_{it-1} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, Z_{it} \geq 0 \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T.$$

Uma das principais limitações do modelo DLSP (5.1.5) consiste no fato de que, uma vez que houver preparação de máquina para a produção de determinado item, toda a capacidade do período deve ser utilizada. Outros modelos da literatura permitem iniciar um novo lote sem custo de preparação adicional ([37]). Ainda considerando a estratégia *Small Bucket*, tem-se o Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes Contínuo (CSLP - do termo em inglês *Continuous Setup Lot Sizing Problem*) e o Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes Proporcional (PLSP - do termo em inglês *Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem*). A ideia básica presente nos modelos CSLP e PLSP consiste em modificar as restrições (5.1.4) substituindo a igualdade por uma desigualdade, de forma que a condição de produzir “tudo ou nada” não seja mais imposta. No modelo PLSP permite-se que sejam produzidos no máximo dois itens num mesmo período, desde que um deles já tenha sido produzido no período anterior, ou seja, a máquina foi preparada.

Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes generalizado

Outro modelo baseado na indexação do tempo para obter o sequenciamento dos lotes é o Modelo de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes Generalizado (GLSP - do termo em inglês *General Lot Sizing and Scheduling Problem*). Neste modelo, períodos de longa duração (macroperíodos) são divididos em intervalos de tempo menores (subperíodos). Em cada subperíodo pode haver a produção de no máximo um item, determinando assim a sequência de produção, devido ao mesmo argumento usado no modelo DLSP. Note que este modelo é híbrido no sentido em que permite a produção de vários itens em um mesmo período (estratégia *big bucket*), porém no máximo um item pode ser produzido em cada subperíodo (estratégia *small bucket*). A palavra Generalizado é usada na definição deste modelo devido ao fato de que este generaliza outros modelos similares, por exemplo o DLSP discutido anteriormente.

A ideia principal do GLSP está no fato de que cada lote está associado unicamente a um subperíodo e o usuário define o número máximo de subperíodos em cada período.

Para descrição do modelo GLSP, consideramos, além dos dados e variáveis do modelo PDLM (3.5.20)-(3.5.25), os seguintes parâmetros que serão utilizados para controlar os subperíodos pertencentes a um período, bem como, o número total de subperíodos.

Novos parâmetros - controle do número de subperíodos

η_t : número máximo de subperíodos no período t ;

$F_t = 1 + \sum_{\tau=1}^{t-1} \eta_\tau$: primeiro subperíodo do período t ;

$L_t = F_t + \eta_t - 1$: último subperíodo do período t .

O número total de subperíodos no horizonte de planejamento é igual a $\eta = \sum_{t=1}^T \eta_t$. Para garantir a produção de no máximo um item em cada subperíodo, as variáveis de produção, de preparação e de controle do custo de preparação devem ser indexadas em termos dos subperíodos. O estoque de cada item é computado entre períodos e não entre subperíodos, pois a demanda é por período, portanto não é necessário redefinir a variável de estoque. Os novos conjuntos de índices e de variáveis são descritos a seguir.

Novos conjunto de índice e variáveis - indexação por subperíodo

n : subperíodos, $n = 1, \dots, \eta$;

X_{in} : número de unidades do produto i produzidas no subperíodo n ;

Y_{in} : variável binária que indica se a máquina foi preparada para produzir o produto i no subperíodo n ($Y_{in} = 1$) ou não ($Y_{in} = 0$);

Z_{in} : é igual a 1 se o custo de preparo da máquina para produção do item i deve ser considerado no subperíodo n , e zero caso contrário.

Como ficam a função objetivo e as restrições do modelo PDLM com a inclusão dos subperíodos? As alterações são de fácil entendimento. Em relação a função objetivo, a parcela referente ao custo total de estoque se mantém inalterada. A parcela referente ao custo de preparação deve ser modificada para custos de trocas, pois, é necessário incluir custos de preparação apenas quando há produção de um mesmo item em dois ou mais subperíodos consecutivos de cada período. Esta estratégia é similar ao que ocorre no modelo DLSP, porém, o custo total de preparação deve ser indexado por subperíodos. A nova função objetivo é descrita em (5.1.6).

Função Objetivo - Modelo GLSP

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T H_{it} I_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\eta} S_i Z_{in} \quad (5.1.6)$$

As restrições de balanceamento de estoque, são similares às restrições (3.5.21) do modelo PDLM, observe no entanto que a produção total de um item i em um período t é igual à produção em todos os subperíodos deste período. A restrição balanceamento de estoque deve ser modificada para (5.1.7). De forma similar,

a capacidade da máquina em cada período deve considerar a produção total de cada item, conforme expresso em (5.1.8). Este modelo não considera a reposição de capacidade (capacidade renovável) entre um subperíodo e outro, ou ainda que a capacidade não usada em subperíodo seja usada no próximo. Assim, pode-se utilizar toda a capacidade de um período no primeiro subperíodo e os outros subperíodos ficam ociosos. É necessário ainda garantir que para cada subperíodo, um item pode ser produzido apenas se a máquina estiver preparada (5.1.9), que haja no máximo um preparo por subperíodo (5.1.10), e que haja o controle do custo de trocas em subperíodos consecutivos (5.1.11).

Novas restrições - consideração dos subperíodos

$$\sum_{n=F_t}^{L_t} X_{in} + I_{it-1} - I_{it} = d_{it}, \quad i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (5.1.7)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{n=F_t}^{L_t} b_i X_{in} \leq Cap_t, \quad t = 1 \dots T \quad (5.1.8)$$

$$X_{in} \leq (Cap_t/b_i)Y_{in}, \quad \forall i, t, n = F_t, \dots, L_t \quad (5.1.9)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{in} \leq 1, \quad n = 1, \dots, \eta; \quad (5.1.10)$$

$$Z_{in} \geq Y_{in} - Y_{i,n-1}, \quad \forall i, n = 1, \dots, \eta. \quad (5.1.11)$$

O Modelo GLSP completo é descrito por (5.1.12).

$$\min \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T H_{it} I_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\eta} S_i Z_{in} \right)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=F_t}^{L_t} X_{in} + I_{it-1} - I_{it} &= d_{it} & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \\ \sum_{i=1}^N \sum_{n=F_t}^{L_t} b_i X_{in} &\leq Cap_t & t = 1 \dots T \\ X_{in} &\leq (Cap_t/b_i)Y_{in} & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T, n = F_t, \dots, L_t \\ \sum_{i=1}^N Y_{in} &\leq 1 & n = 1, \dots, \eta \\ Z_{in} &\geq Y_{in} - Y_{i,n-1} & i = 1 \dots N, n = 1, \dots, \eta \\ Y_{in} \in \{0, 1\}, X_{in} \geq 0, Z_{in} &\geq 0 & i = 1 \dots N, n = 1, \dots, \eta \\ I_{it} &\geq 0 & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Aplicações do modelo GLSP em diversos contextos industriais podem ser encontradas em [12, 13, 42, 43, 20, 14]. Nos modelos integrados baseados no PCVA descritos na Seção 5.2, as variáveis de troca Z_{it} no modelo DLSP e Z_{in} no modelo GLSP serão redefinidas com a inclusão do índice j para explicitar a possibilidade de troca da produção do item i para o item j .

5.2 Modelos baseados no PCVA

Uma segunda estratégia usada na literatura para modelar as decisões de sequenciamento no modelo integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção faz uso da estratégia *big bucket*. Nesta estratégia, permite-se que vários itens sejam produzidos em um mesmo período e incluem-se restrições para obter a ordem em que os itens são produzidos. Apresentamos nesta seção um modelo genérico desenvolvido em [71] a partir do modelo proposto em [34] para o planejamento da produção de refrigerantes. O modelo também inclui as decisões e restrições do modelo PDLM (3.5.20)-(3.5.25). Para obter a sequência de produção dos itens em cada período, as restrições de designação e as restrições de eliminação de subrotas descritas na Seção 2.2 são usadas. Assim, garante-se, em cada período, que apenas os itens produzidos são sequenciados, e eliminam-se soluções que gerem subsequências.

Conforme mencionado no final da Seção 5.1, além das variáveis e parâmetros definidos para o PDLM, definimos uma nova variável para explicitar a possibilidade de, em um período t , interromper a produção de um item i e iniciar a produção de um novo item j , essa variável será chamada de variável de troca. Nesta nova formulação, consideramos que os itens que podem ser produzidos no período t são equivalentes às “cidades” do PCVA (descrito na Seção 2.2) e que, o custo de troca da produção do item i para o item j é equivalente ao custo de viajar da cidade i para a cidade j . A nova variável a ser considerada no modelo é definida de acordo com:

Novos parâmetros e variável - troca

s_{ij} : tempo de troca do item i para o item j ;

S_{ij} : custo de troca do item i para o item j ;

$$z_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{se há troca do item } i \text{ para o item } j \text{ no período } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com esta interpretação, se num período t , os itens $\{2, 3, 5, 7\}$ devem ser produzidos, a sequência de produção seria obtida resolvendo um PCVA com 4 cidades e uma possível solução seria o circuito hamiltoniano $\{3, (3, 5), 5, (5, 2), 2, (2, 7), 7, (7, 3), 3\}$. Esta solução indica que o item 3 é o primeiro item a ser produzido no período, e os demais seriam produzidos na sequência: 5, 2 e 7. Em termos de troca haveriam 4 trocas, e a máquina estaria preparada para o produção do item 3 no início e no final do período.

Em geral, não sabemos qual deve ser o primeiro item a ser produzido em cada período e também não há necessidade de deixar a máquina preparada ao final do período para o item inicial. Para modelar esta situação, incluímos um item (ou cidade) “fantasma”, que chamamos de i_0 para ser o primeiro e o último item a ser preparado em cada período e consideramos que o custo de troca de/para o item fantasma é zero. Assim a solução do PCVA, com 5 cidades, para a sequência 3,5,2,7, é $\{i_0, (i_0, 3), 3, (3, 5), 5, (5, 2), 2, (2, 7), 7, (7, i_0), i_0\}$.

A variável de preparo, Y_{jt} do modelo PDLM, pode ser escrita em termos da variável de troca. Se considerarmos que quando há troca do item i para o item j , a máquina deverá estar preparada para a produção do novo item, podemos escrever

que:

$$Y_{jt} = \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq j}}^N z_{ijt}. \quad (5.2.13)$$

Para garantir que todos os itens sejam sequenciados, devemos incluir no modelo um conjunto de restrições similares às restrições usadas no PCVA para garantir a inclusão de cada cidade exatamente uma vez. Considerando que o item fantasma $i_0 = 0$ é o primeiro item do circuito hamiltoniano que queremos obter em cada período t , a restrição (5.2.14) garante que só há preparação para o item k (em termos de (5.2.13), troca de algum item i para k) se houve preparação da máquina para o segundo item da sequência, um item $j, j \neq i_0$ (troca do item fantasma i_0 para o item j). Além disso, é necessário garantir que se há troca de um item i para outro item k , então deve haver troca do item k para algum outro item j , restrições (5.2.15). As restrições (5.2.16) garantem que cada item é produzido no máximo uma vez em cada período.

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i_0}}^N z_{i_0jt} \geq \sum_{i=i_0}^N z_{ikt}, \quad i = 1, \dots, N; k \neq i, t = 1, \dots, T \quad (5.2.14)$$

$$\sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^N z_{ikt} = \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^N z_{kjt}, \quad k = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \quad (5.2.15)$$

$$\sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^N z_{ijt} \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T. \quad (5.2.16)$$

Conforme discutido na Seção 2.2, as restrições (5.2.14)-(5.2.16) sozinhas não garantem uma sequência com todos itens que serão produzidos no período, estas restrições permitem a existência de subsequências desconexas (ou subrotas se considerarmos o item fantasma). Existem muitas formulações propostas na literatura para o PCVA que diferem essencialmente na representação das restrições de eliminação de subrotas. Nesta seção, apresentamos um modelo para o problema PDSL baseado nas restrições MTZ (ver Seção 2.2, inequações 2.2.18). A reformulação das restrições MTZ neste novo contexto é expressa por:

$$0 \leq u_{jt} \leq n, \quad \forall j; \quad (5.2.17)$$

$$u_{it} - u_{jt} + (N)z_{ijt} \leq N - 1 \quad i, j = 2, \dots, N; (i \neq j); t = 1, \dots, T. \quad (5.2.18)$$

O valor numérico da variável auxiliar, u_{jt} , indica a posição do item j na sequência de produção do período t .

O modelo completo para o PDSL baseado no PCVA é descrito em (5.2.19).

$$\min\left(\sum_{t=1}^T\left(\sum_{i=1}^N H_{it}I_{it} + \sum_{j=1}^N S_{ij}z_{ijt}\right)\right)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} X_{it} + I_{it-1} - I_{it} &= d_{it} & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \\ \sum_{i=1}^N (b_i X_{it} + \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^N s_{ij} z_{ijt}) &\leq Cap_t & t = 1 \dots T \\ X_{it} &= (Cap_t/b_i) Y_{it} & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \\ \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i_0}}^N z_{i_0jt} &\geq \sum_{i=i_0}^J z_{ikt} & i, k = 1 \dots N (k \neq i), t = 1 \dots T \\ \sum_{\substack{i=i_0 \\ i \neq k}}^N z_{ikt} &= \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq k}}^N z_{kjt}, & k = 1 \dots N, t = 1 \dots T \quad (5.2.19) \\ \sum_{\substack{j=i_0 \\ j \neq i}}^N z_{ijt} &\leq 1, & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \\ u_{it} - u_{jt} + (N)z_{ijt} &\leq N - 1 & i, j = 2, \dots, N; (i \neq j); t = 1, \dots, T \\ Y_{it} &\in \{0, 1\}, & i = 1 \dots N, t = 1 \dots T \\ I_{it}, u_{it}, X_{it}, z_{ijt} &\geq 0 & i, j = 1 \dots N (j \neq i), t = 1 \dots T. \end{aligned}$$

O uso das restrições MTZ para modelar as restrições de sequenciamento no modelo integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção tem sido usado como muito sucesso em diversos contextos industriais (ex. [5, 34]). Na Seção 2.2 foram discutidas outras classes de inequações para eliminação de subrotas. Uma comparação entre modelos para o problema PDSL no contexto da produção de refrigerantes usando as restrições MTZ e as restrições DFJ para modelar as restrições de sequenciamento pode ser encontradas em [73].

5.3 Exercícios

Exercício 5.1. Considere o Exercício 3.7 e o Exemplo 4.1 discutidos nos Capítulos 3 e 4. Escolha um dos modelos tratados neste capítulo para representar o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes apresentado nesses dois exemplos.

Exercício 5.2. Faça um exemplo numérico que permita entender os parâmetros η_t , F_t e L_t de controle de períodos e subperíodos.

Exercício 5.3. Modele o problema PDSL considerando a estratégia big bucket e as restrições DFJ para o PCVA discutidas na Seção 2.2. Uma proposta de modelagem no contexto da indústria de ração animal e de refrigerantes pode ser encontrada respectivamente em [97] e [40].

Bibliografia

- [1] AFENTAKIS, P.; GAVISH, B.; KARMARKAR, U. Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problem in multistage assembly systems. *Management Science*, v. 30, p. 222–239, 1984.
- [2] AKKER, J. M. van den; HURKENS, C. A. J.; SALVELSBERGH, M. W. P. Time-indexed formulations for machine scheduling problems: column generation. *Inform Journal of Computing*, v. 11, p. 111–124, 2000.
- [3] ALEM, D. *Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- [4] ALFIERI, A.; BRANDIMARTE, P.; D’ORAZIO, S. Lp-based heuristics for the capacitated lot-sizing problem: The interaction of model formulation and solution algorithm. *International Journal of Production Research*, v. 40, p. 441–458, 2002.
- [5] ALMADA-LOBO, B. et al. Single machine multiproduct capacitated lot sizing with sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*, v. 45, p. 4873–4894, 2007.
- [6] ANDRIOLO, A. et al. A century of evolution from harris’s basic lot size model: Survey and research agenda. *Accepted to International Journal of Production Economics*, 2014.
- [7] APPLGATE, D. et al. Implementing the dantzig-fulkerson-johnson algorithm for large traveling salesman problems. *Mathematical Programming*, v. 97, p. 91–153, 2003.
- [8] ARAUJO, S. A. de. *Estudos de Problemas de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- [9] ARAUJO, S. A. de. *Modelos e métodos para o planejamento e programação da produção aplicados no setor de fundições*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- [10] ARAUJO, S. A. de. *Problemas de Dimensionamento de Lotes e suas Integrações a Outros Problemas em Contextos Industriais*. [S.l.]: Tese de Livre Docência-Universidade Estadual de Paulista, São José do Rio Preto, 2011.
- [11] ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: Modelagem, métodos de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, v. 20, p. 287–306, 2000.

- [12] ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N.; CLARK, A. R. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot sizing with sequence dependent. *Journal of Heuristics*, v. 13, p. 1038–1045, 2007.
- [13] ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N.; CLARK, A. R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computer & Operations Research*, v. 35, p. 916–932, 2008.
- [14] ARAUJO, S. A. de; CLARK, A. R. A priori reformulations for joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing problem. *Computers & Industrial Engineering*, v. 65, p. 577–585, 2013.
- [15] ARAUJO, S. A. de et al. Period decompositions for the capacity constrained lot size problem with setup times. *Montreal: Les Cahiers du GERAD*, G-2013-76, p. 1–23, 2013.
- [16] ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Editora Campus, 2006.
- [17] ATAMTÄURK, A.; SAVELSBERGH, M. Integer programming software systems. *Annals of Operations Research*, v. 140, p. 67–124, 2005.
- [18] BARANY, I.; ROY, T. J. van; WOLSEY, L. A. Strong formulation for multi-item capacited lot sizing. *Management Science*, v. 30, p. 1255–1261, 1984.
- [19] BAZARAA, M.; JARVIS, J. *Linear Programming and Network Flows*. New York: J. Wiley & Sons, N.Y., 2^a edição, 1990.
- [20] BERNARDES, E.; ARAUJO, S. de; RANGEL, S. Reformulação para um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes. *Pesquisa Operacional*, v. 30, p. 637–655, 2010.
- [21] BERNARDES, E. D. *Reformulação e Inequações Válidas para um Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2008.
- [22] BEZERRA, L. et al. Analyzing the impact of moaco components: An algorithmic study on the multi-objective shortest path problem. *Expert Systems with Applications*, v. 40, p. 345–355, 2013.
- [23] BEZERRA, S.; RANGEL, S. Problemas de sequenciamento: Modelos e métodos de resolução. In: *Anais do CIC - Congresso de Iniciação Científica da UNESP, Ilha Solteira*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [24] BILLINGTON, P.; MCCLAIN, L.; THOMAS, L. Mathematical programming approaches to capacity mrp systems: Review, formulation and problem reduction. *Management Science*, v. 29, p. 1126–1141, 1983.
- [25] BITRAN, G.; YANASSE, H. Computational complexity of the lot size problem. *Management Science*, v. 28, p. 1174–1186, 1982.
- [26] BOAVENTURA, P. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2001.
- [27] BURIOL, L.; RESENDE, M.; THORUP, M. Speeding up dynamic shortest paths. *INFORMS Journal on Computing*, v. 20, p. 191–204, 2008.

- [28] CAMPELO, R.; MACULAN, N. *Algoritmos e Heurísticas*. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Federal Fluminense, 1994.
- [29] CARVALHO, J. M. C. de. *Logística*. Lisboa: 3^a ed. Lisboa: Edições Silabo, 2002.
- [30] CARVALHO, J. M. V. de. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, p. 253–273, 2002.
- [31] CLARK, A. J.; SCARF, H. Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*, v. 6, p. 475–490, 1960.
- [32] COOK, W. *In Pursuit of the Traveling Salesman*. Princeton: Princeton University Press, 2012.
- [33] DASKIN, M. *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995.
- [34] DEFALQUE, C. M.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. Usando o atsp na modelagem do problema integrado de produção de bebidas. *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 12, p. 195–209, 2011.
- [35] DENIZEL, M. et al. Equivalence of the lp relaxations of two strong formulations for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *OR Spectrum*, v. 30, p. 773–785, 2008.
- [36] DENIZEL, M.; SÜRAL, H. On alternative mixed integer programming formulations and lp-based heuristics for lot-sizing with setup times. *Journal of the Operational Research Society*, v. 57, p. 389–399, 2006.
- [37] DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, p. 221–235, 1997.
- [38] EIBEN, A.; SMITH, J. *Introduction to Evolutionary Computing*. [S.l.]: Springer, 2003.
- [39] EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, v. 35, p. 832–848, 1987.
- [40] FERREIRA, D. et al. Single-stage formulations for synchronized two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics*, v. 136, p. 255–265, 2012.
- [41] FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte. *Produção*, v. 18, p. 76–88, 2008.
- [42] FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, v. 196, p. 697–706, 2009.
- [43] FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers & Operations Research*, v. 37, p. 684–691, 2010.

- [44] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de. Relaxação lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores. *TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 13, p. 13–24, 2012.
- [45] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de. Reformulation and a lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. *Annals of Operations Research*, v. 217, p. 213–231, 2014.
- [46] FLORIAN, M.; LENSTRA, J.; KAN, A. R. Deterministic production planning algorithms and complexity. *Management Science*, v. 26, p. 669–679, 1980.
- [47] FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. [S.l.]: Duxbury Press, Cole Publishing Company, 2002.
- [48] FOURER, R.; LOPES, L.; MARTIN, K. Lpfmtl: A wk xml schema for linear and integer programming. *INFORMS Journal on Computing*, v. 17, p. 139–158, 2005.
- [49] FRIEDLANDER, A. *Elementos de programação não-linear*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1994.
- [50] GAREY, M.; D.S., J. *Computer Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*. [S.l.]: W.H. Freeman Company, 1979.
- [51] GOLDBARG, M.; LUNA, H. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. [S.l.]: Editora Campus, 2000.
- [52] GONNET, G.; KOROSTENSKY, C.; BENNER, S. Evaluation measures of multiple sequence alignments. *Journal of Computational Biology*, v. 7, p. 261–276, 2000.
- [53] GONZAGA, C. *Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.
- [54] GOUVEIA, L.; PIRES, J. The asymmetric travelling salesman problem: on generalizations of disaggregated miller tucker zemlin constraints. *Discrete Applied Mathematics*, v. 112, p. 129–145, 2001.
- [55] GUINARD, M. Lagrangean relaxation. *TOP*, v. 11, p. 151–228, 2003.
- [56] GUROBI. *Gurobi Optimizer Product Overview*. jun. 2014. Disponível em: <<http://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/gurobi-overview>>.
- [57] HARRIS, F. How many parts to make at once. *Operations Research*, v. 38, p. 947–950, 1990.
- [58] HERNANDES, F.; BERTON, L.; CASTANHO, M. O problema do caminho mínimo com inestezas e restrições de tempo. *Pesquisa Operacional*, v. 29, p. 471–488, 2009.
- [59] IBM, C. *CPLEX*. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>, 2009. Visitada pela última vez em 12/10/2012.

- [60] JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times. *Operations Research Letters*, v. 32, p. 185–195, 2004.
- [61] JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, v. 46, p. 1619–1643, 2008.
- [62] KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, p. 365–378, 2003.
- [63] KIM, S. et al. Decomposition based heuristic algorithms for lot sizing and scheduling problem treating time horizon as continuous. *Computers & Operations Research*, v. 37, p. 302–314, 2010.
- [64] KRARUP, J.; BILDE, O. *Plant location, set covering and economic lot size: An $O(mn)$ -algorithm for structured problems*. [S.l.]: Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben, Band 3: Optimierung bei Graphentheoretischen Ganzzahligen Problemen, 1977.
- [65] LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*. [S.l.]: Editora Campus, 2002.
- [66] LAWLER, E. et al. *The Traveling Salesman Problem - A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Chichester: Wiley, 1985.
- [67] LIMA, D.; RANGEL, S. Ormaps: Um sad para os problemas de localização. In: *Anais SBPO*. [S.l.: s.n.], 2002.
- [68] LINDEROTH, J. T.; K., T. *Noncommercial Software for Mixed-Integer Linear Programming*. [S.l.]: Relatório Técnico, Department of Industrial and Systems Engineering, Lehigh University, Bethlehem, 2005.
- [69] LORENA, L. et al. Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas. *Gestão & Produção*, v. 8, p. 180–195, 2001.
- [70] LUENBERGER, D. G. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1984.
- [71] MADONADO, M.; RANGEL, S. Três modelos matemáticos para o problema integrado de planejamento e sequenciamento da produção. In: *Anais do CMAC-Sul*. [S.l.: s.n.], 2014.
- [72] MAES, J.; MCCLAIN, J.; WASSENHOVE, L. van. Multilevel capacitated lotsizing complexity and lp based heuristic. *European Journal of Operational Research*, v. 53, p. 131–148, 1991.
- [73] MALDONADO, M.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. A study of different subsequence elimination strategies for the soft drink production planning. *Accepted to Journal of Applied Research Technology*, 2014.
- [74] MARAVELIAS, C.; SUNG, C. Integration of production planning and scheduling: overview, challenges and opportunities. *Computers & Chemical Engineering*, v. 33, p. 1919–1930, 2009.
- [75] MELEGA, G.; FIOROTTO, D.; ARAUJO, S. de. Formulações fortes para o problema de dimensionamento de lotes com várias plantas. *TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 14, p. 305–318, 2013.

- [76] MOODY, S. *Methods and Tools for Modelling Linear and Integer Programming Problems*. Tese (Doutorado) — Department of Mathematics and Statistics, Brunel University, Uxbridge, UK,, 1994.
- [77] MULLER, F. M. *Introdução aos Problemas de Sequenciamento*. São Carlos: Minicurso, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2002.
- [78] NAHMIA, S. *Production and Operation Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill/Irwin, 6 ed, 1988.
- [79] ÖNCAN, T.; ALTINEL, I.; LAPORTE, G. Invited review: A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. *Computers & Operations Research*, v. 36, p. 637–654, 2009.
- [80] NEMHAUSER, G.; KAN, A. R.; TODD, M. *Optimization - Handbooks in Operations Research and Management Science*. [S.l.]: Elsevier Science, 1994.
- [81] NEMHAUSER, G.; WOLSEY, L. *Integer and Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Wiley-Interscience Publication, 1988.
- [82] OPTIMIZATION, D. *Applications Of Optimization With XpressMP*. [S.l.]: Tradução para o inglês de Programmation Linéaire de C. Guéret, C. Prins E M. Sevaux, Dash Optimization Ltda, 2000.
- [83] PADBERG, M.; RINALDI, G. A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, v. 33, p. 66–100, 1991.
- [84] PINEDO, M. *Scheduling - Theory, Algorithms and Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- [85] PIZZOLATO, N.; BARCELO, F.; LORENA, L. School location methodology in urban areas of developing countries. *International Transactions in Operational Research*, v. 11, p. 667–681, 2004.
- [86] POCHET, Y.; VYVE, M. van. A generic heuristic for production planning problems. *INFORMS Journal of Computing*, v. 16, p. 316–327, 2004.
- [87] POCHET, Y.; WOLSEY, L. *Production planning by mixed integer programming*. New York: New York: Springer Verlag, 2006.
- [88] RABELO, A.; MOREIRA, M.; RANGEL, S. O problema do caixeiro viajante como auxiliar no desenvolvimento do raciocínio no ensino fundamental e médio. In: *Anais XXXIII CNMAC*. [S.l.: s.n.], 2010.
- [89] RAMALHETE, M.; GUERREIRO, J.; MAGALHÃES, A. *Programação Linear*. [S.l.]: Mac Graw Hill, 1995.
- [90] RANGEL, S. *Solving Integer Programming Problems using Preprocessing and Cutting Planes: Theory and Implementation of Branch and Cut*. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado, Brunel University, Uxbridge, Inglaterra, 1995.
- [91] RANGEL, S. *Introdução à construção de modelos de otimização linear e inteira*. São Carlos: 2. ed. São Carlos-SP: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional-SBMAC, 2012.

- [92] RONCONI, D. P.; BIRGIN, E. G. In: _____. [S.l.: s.n.]. cap. Mixed-Integer Programming Models for Flowshop Scheduling Problems Minimizing the Total Earliness and Tardiness.
- [93] SALTZMAN, M. Broad review of software packages available. *OR/MS Today*, p. 42–51, 1994.
- [94] SHARDA, R.; RAMPAL, G. Algebraic modeling languages on pcs. *OR/MS Today*, v. 22, p. 58–63, 1995.
- [95] SÜRAL, H.; DENIZEL, M.; WASSENHOVE, L. V. Lagrangean relaxation based heuristics for lot sizing with setup times. *European Journal of Operational Research*, v. 194, p. 51–63, 2009.
- [96] TOLEDO, F.; ARMENTANO, V. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, v. 175, p. 1070–1083, 2006.
- [97] TOSO, E.; MORABITO, R.; CLARK, A. Combinação de abordagens glsp e atsp para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de suplementos para nutrição animal. *Pesquisa Operacional*, v. 28, p. 423–450, 2008.
- [98] TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, p. 353–366, 1989.
- [99] WAGNER, H.; WHITIN, T. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, v. 5, p. 89–96, 1958.
- [100] WILLIAMS, S. *Model Building in Mathematical Programming*. [S.l.]: Ed. John Wiley & Sons, 1990.
- [101] WILSON, R.; WATKINS, J. *Graphs - An Introductory approach*. [S.l.]: J. Wiley, 1990.
- [102] WOLSEY, L. *Integer Programming*. [S.l.]: Ed. John Wiley & Sons, 1998.
- [103] WRIGHT, S. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. [S.l.]: SIAM, 1997.

Índice

- branch and bound*, 11, 22
- branch and cut*, 11, 22
- interface*, 10

- adjacência de arestas, 13
- adjacência de vértices, 13
- AMPL, 10, 33, 34
- atraso na entrega, 28

- caixeiro viajante, 17
- caminho, 14
- caminho mínimo, 15
- capacidade, 28
- circuito, 14
- circuito Hamiltoniano, 14
- corte de estoque, 15
- custo de preparo, 28
- custo de um caminho, 14

- demanda, 27–31, 35, 36, 39, 44, 61
- dimensionamento de lotes, xi, 9, 11, 13, 15, 24, 25, 27, 28, 31, 33, 39
- dimensionamento de lotes monoestágio, 27, 29, 43
- dimensionamento de lotes multi-itens, 43
- dimensionamento de lotes multiestágio, 27, 45
- dimensionamento e sequenciamento de lotes, 13, 57
- dimensionamento e sequenciamento de lotes discreto (DLSP), 58
- dimensionamento e sequenciamento de lotes generalizado, 60
- Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem, 58
- documentação, 10

- Economic Order Quantity (EOQ), 28
- escalonamento, 52
- estágios, 27
- estoque, 28
- estoque de escalão, 47–50

- exemplar, 10

- ferramentas de modelagem, 9
- ferramentas de resolução, 9
- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson - DFJ, 21
- Formulação de Miller, Tucker e Zemlin - MTZ, 20

- General Lot Sizing and Scheduling Problem, 60
- grafo, 13
- grafo valorado, 13

- horizonte de planejamento, 28

- itens, 27

- limitantes, 7
- linguagem algébrica de modelagem, 10
- logística, xii, 13
- lote-por-lote, 35

- modelo indexado pelo tempo, 53
- modelo matemático, 1–3, 10, 20, 25, 29, 33
- MOSEL, 10
- método simplex, 11
- métodos de pontos interiores, 11

- otimização inteira, 5
- otimização inteira mista, 6
- otimização linear contínua, 4
- otimização não linear, 6
- otimização inteira mista, 20

- planos de corte, 11
- problema de localização de facilidades (PLF), 22
- problema do caixeiro viajante assimétrico (PCVA), 19
- problema do caminho mínimo (PCM), 14
- programação da produção, xi, 52, 57

rede, 13–15, 18, 39, 42

reformulações, 7, 39

sequenciamento, xi, 13, 51, 57, 58, 60, 65

Silver-Meal, 35

simulação, 10

small bucket, 58

subrotas, 20

tempo de preparo, 28

tempo e custo de preparo, 28

teoria dos grafos, 14, 18

Wagner e Whitin, 29, 36, 39, 45

XPRESS-MOSEL, 10